数理物理シリーズ
1
土屋昭博・砂田利一共編

共形場理論入門

山田泰彦著

培風館

数理物理シリーズ

刊行にあたって

17 世紀にニュートンらにより基礎づけられた微分積分学は，自然の力学法則を記述する言語としての地位を確立しました．以来数学は，自然や社会のさまざまな現象や法則を記述する科学の共通言語として用いられてきただけでなく，さまざまな学問との関わりの中で多くの新しい概念を生み出し，独自の発展を遂げてきました．

特に近年数学と物理学との相互作用が顕著にみられ，ゲージ理論，超弦理論，可解模型などの舞台として，代数幾何学，微分幾何学，トポロジー，表現論，代数解析学，整数論などの現代数学を大きく巻き込んだスケールの大きな新たな展開が始まっています．このことは，ケプラー，ニュートン，リーマン，マックスウェル，アインシュタインらの多くの科学者により展開されてきた「空間概念」の新しい発展の段階を予感させます．

このような「相互作用」を現代数学の到達した視点で解説することは，数学や物理を学ぼうとする学生のみならず，第一線で活躍している研究者にとっても有意義であると考え，今回「数理物理シリーズ」を企画発刊いたします．

本シリーズは，いま述べたような，数学と物理が互いに相互作用する場を読者に見せることを目的としています．数学の性格を理解しつつ，物理学の価値観を学ぶ巻もあれば，物理学の問題意識から派生した数学を解説する巻もあります．また一見，純粋に数学的にみえる話題を扱う巻もあります．しかし，このような話題も，どこかで物理学に通じる可能性があります．その可能性を現実にする人が，本シリーズを読みこなす読者の中にいるかもしれません．編者が期待するのは，数学は数学者の学問，物理学は物理学者の学問という固定観念から読者が解き放たれることです．

このため，第一線で活躍する研究者に，数学と物理学の相互作用を生き生きと伝えるよう，執筆をお願いしました．また，本シリーズを企画するにあたって，理念として次の点に心がけています．

(1) 「定義」,「補題」,「定理」,「証明」という従来型の著述形式を可能なかぎり避け，理論の背景にある動機や意味などを丁寧に説明する．
(2) 一貫したストーリーとしての内容構成に留意し，また，現代数学の最前線の内容まで記述を広げる．
(3) 学生の理解力を考慮したゆとりのあるテキストを目ざす．

本シリーズが，新たに研究の道に入ることを目ざしている学生や若手研究者の興味を引き立て，その実力を向上させるために役だつことを願ってやみません．

2005 年 11 月

編　者
土屋 昭博
砂田 利一

はしがき

本書は共形場理論の基礎を解説したものである．方針としては数学・物理学どちらの学生 (学部程度) にも楽しんでもらえる内容を目指した．

二次元共形場理論は，1984 年の Belavin-Polyakov-Zamolodchikov による画期的論文以降，多くの数学者・物理学者により集中的に研究が進められ，1990 年頃までにはほぼ基本的な結果が出そろったといえる．その成果は，二次元の臨界現象の記述や弦理論などへの物理的応用はもちろん，表現論や可積分系，位相的場の理論など，その後の数学に与えた影響も少なくない．共形場理論そのものの研究は現在では少なくなっているが，本書で述べたような基本的な結果や方法は，その後の数理物理の飛躍的進展の中で繰り返し活用されている．そこで本書では，「知っていれば便利と思うが，それだけに集中して勉強する時間もとれない」といった学生や研究者の方々が，共形場理論の考え方や背景などを手軽に知るための入門書となることを主要な目標とした．

本書をまとめるにあたっては，次の 2 点において少々欲張った．一つには，扱う内容の範囲である．共形場理論が生まれ出た学問的な背景や，その影響は広範に及ぶので，なるべく多くの話題を紹介するよう努めた．二つ目は，扱う内容の程度について，具体例を多く示し，できるだけ平易で詳しい説明に心がけた．部分ごとにバランスの濃淡があるが，全体としては，基礎となる前半が詳しく，発展的な後半はややハイペースなものとなった．

本書では，話の流れを損なわないようにするため，正確な定義や定理の詳細を省き，読者の想像に任せたところも少なくない．一方で，基本的な計算の手順や例は詳しく示したつもりである．かなり面倒な計算も含まれるので，結果を眺めてもらうだけでもよいし，最近は計算機による数式処理もずいぶん手軽で強力になっているので，そうした道具も使いながら読み進めていくのもお勧めである．計算 (プログラム) がうまくいって，一見複雑そうな式が期待どおりに因数分解したり相殺したりすると，それだけでも結構楽しいものである．本

書を素材にして，そのような楽しみも味わっていただければ幸いである．

本書の内容は，BPZ をはじめとする先人達の偉業をまとめたものであるが，一部に著者自身の研究結果も含めさせていただいた．関連する共同研究などを通してさまざまなことをご教示いただいたすべての共同研究者の方々に，心からお礼を申しあげたい．

さらに，執筆に際し，粟田英資氏，野海正俊氏，三町勝久氏には，原稿・内容について有益な助言をいただいた．また，落合啓之氏には，多数の誤りや疑問点の指摘をいただき大いに助けられた．深く感謝する次第である．

最後に，本書の執筆を勧めていただいた土屋昭博先生，原稿の改良にご尽力いただいた岩田誠司さんはじめ出版社の方々，そして，執筆が遅々として進まず挫折しそうだった頃にも，暖かく励まして下さった故 梁成吉博士に，この場を借りて心から感謝の言葉を捧げたい．

2005 年 9 月

山田泰彦

目　　次

記 号 表

全 体

$\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$	複素数，実数，有理数，整数全体
$\mathbf{P}^N$	N 次元複素射影空間
$\binom{n}{k}$	二項係数: $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$
min	最小値
res	留数
Ker, Coker, index	線形写像の核，余核，指数
$\oplus$, $\otimes$, $\wedge$	直和，テンソル積，外積
$\dim V$	($\mathbf{C}$ 上の) ベクトル空間 V の (複素) 次元
$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$	$a_1, \ldots, a_n$ を対角成分とする対角行列
$E_{i,j}$	行列単位［式 (4.8)］
δ_{ij}	Kronecker のデルタ: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ $(i \neq j)$
$\mathbf{C}[x]$, $(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$	x 変数 $\mathbf{C}$ 係数の (Laurent) 多項式 全体
$\mathbf{C}[[x]]$, $(\mathbf{C}[[x, x^{-1}]])$	同上の形式的ベキ級数 (Laurent 級数) の全体
$O(z^n)$	$f(z) = g(z) + O(z^n)$ $\iff z = 0$ の近くで $f(z) - g(z) = \sum_{k \geq n} c_k z^k$
$\mathfrak{gl}$, $\mathfrak{sl}$, $\mathfrak{sp}$, $\mathfrak{so}$	古典 Lie 群 GL, SL, Sp, SO の Lie 代数［式 (4.115)］
tr, det, Pf, Hf	トレース, 行列式, Pfaffian［式 (2.74)］, Haffnian［式 (1.124)］
$[\ ,\ ]$	交換子: $[A, B] = AB - BA$
$[\ ,\ ]_+$	反交換子: $[A, B]_+ = AB + BA$
$\mathrm{ad}\, A$	A の adjoint 作用素: $\mathrm{ad}\, A(B) = [A, B]$
$\mathfrak{g}$, $\widehat{\mathfrak{g}}$	(単純)Lie 代数，対応する affine Lie 代数
$\langle \mathcal{O} \rangle$	作用素 $\mathcal{O}$ の真空期待値
g	Riemann 面の種数

1 章

$\mathcal{A}$	結合代数 (1.1 節)
$\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g})$	Lie 代数，普遍包絡環 (1.1 節)
$:\ :$	正規積 (1.3 節)
$c(\ ,\ )$	縮約 (1.3 節)
$\|A\| = 0, 1$	$A \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ の偶奇性 (1.5 節)
s_λ	分割 λ に対する Schur 多項式［式 (1.100)］

2 章

$\varphi(z)$, $J(z) = \varphi'(z)$	自由 boson 場 (2.1)，$U(1)$ カレント［式 (2.6)］
L_n, $T(z)$	Virasoro 代数の生成元，ストレステンソル (2.3 節)
ρ	$T(z) = \frac{1}{2} : \varphi'(z)^2 : + \rho\varphi''(z)$［式 (2.39)］
$V_\alpha(z) = : e^{\alpha\varphi(z)} :$	頂点作用素 (2.4 節)
$\langle\alpha\|$, $\|\alpha\rangle$	荷電真空 (2.4 節)
H_α	(電荷 α の)boson Fock 空間 (2.4 節)
$p(n)$	自然数 n の分割数［式 (2.61)］
$\psi(z)$	自由 fermion (2.5 節)
$F^{\mathrm{NS/R}}$	NS/Ramond 表現の fermion Fock 空間 (2.5 節)
$\psi(z)$, $\bar{\psi}(z)$	荷電 fermion ($\lambda = \frac{1}{2}$ の bc 系) (2.6 節)
λ	bc 系 $b(z), c(z)$ の共形次元 $(\lambda, 1-\lambda)$ (2.6 節)

3 章

c, h	Virasoro 代数の中心，重み (共形次元) (3.1 節)
V_h (V_h^*)	最高重み h の左 (右)Virasoro 加群 (3.1 節)
$\Phi_h(z)$	重み h の primary 場［式 (3.22)］
$\{w, z\}$	$\dfrac{w'''}{w'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{w''}{w'}\right)^2$: Schwarz 微分［式 (3.37)］
$\mathbf{1}$	恒等作用素 (3.4 節)
(AB)	$A(z)B(w) = (\text{特異部}) + (AB)(w) + O(z-w)$ (3.4 節)
$\Lambda(z)$	$(TT)(z) - \frac{3}{10}T''(z)$［式 (3.80)］
$h_{r,s}$	$\dfrac{(rt-s)^2 - (t-1)^2}{4t}$［式 (3.100)］
$\|\chi_{r,s}\rangle$, $\chi_{r,s}(z)$	Virasoro 代数の特異ベクトル，null 場 (3.7 節)

$[r,s]=V_{h_{r,s}}$	Virasoro 代数のミニマル模型の既約表現 (3.7 節)
$\chi^{\mathrm{Vir}}_{r,s}$	Virasoro 既約表現 $V_{h_{r,s}}$ の指標 [式 (3.112)]
$\sigma(z)$	$c=\frac{1}{2}$ の Virasoro 代数 (Ising 模型) のスピン場 (3.9 節)
$\beta,\ t,\ \alpha_{r,s}$	$\rho=\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{1}{\beta},\ \alpha_{r,s}=\dfrac{1-r}{2}\beta+\dfrac{s-1}{\beta},\ \beta^2=2t$ [式 (3.157)]

4 章

e_i, h_i, f_i	Chevalley 生成元 (4.1 節)
$\mathfrak{g}(A)$	Cartan 行列 A に対する Kac-Moody Lie 代数 (4.1 節)
M_λ, L_λ	単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Verma 表現，可積分表現 (4.2 節)
$\|\lambda\rangle$	M_λ または L_λ の最高重みベクトル (4.2 節)
$\rho(X)$	$X\in\mathfrak{g}$ の表現 (4.3 節)
${f^{ab}}_c$	構造定数： $[X^a,X^b]={f^{ab}}_cX^c$ [式 (4.35)]
$\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_-$	$\mathfrak{g}$ の三角分解 (4.4 節)
$\Delta,\ \Delta_+$	ルート全体，正ルート全体 (4.4 節)
$\alpha_i,\ \alpha_i^\vee=\dfrac{2\alpha_i}{\alpha_i^2},\ \theta$	基本ルート，基本コ・ルート，最高ルート (4.4 節)
$B(\ ,\ )=(\ ,\ )$	$\mathfrak{g}$ または $\mathfrak{h}$ の標準内積，$(\theta,\theta)=2$ (4.4 節)
$g^{ab},\ g_{ab}$	標準内積の成分 $g^{ab}=B(J^a,J^b)$，その逆行列 (4.4 節)
$\Omega,\ \Omega_{ij}$	2 次の Casimir 作用素，KZ 方程式の係数行列 (4.4 節)
ρ	Weyl ベクトル (正ルートの和の半分) (4.4 節)
Λ_i	基本重み： $(\alpha_i^\vee,\Lambda_j)=\delta_{ij}$ (4.5 節)
$\mathrm{ch}V$	表現 V の指標 (4.5 節)
$s_i\in W$	Weyl 群 W の単純鏡映 (4.5 節)
$\Delta(x)$	$x\in\mathfrak{g}$ のテンソル積表現 (4.6 節)
$J^a(z)$	カレント作用素 (4.7 節)
$k^{ab},\ k$	$k^{ab}=kg^{ab}$，k は表現のレベル (4.7 節)
$h^\vee,\ \kappa$	双対 Coxeter 数 [式 (4.114), (4.115)]，$\kappa=k+h^\vee$
$\widehat{L}_\lambda,\ \widehat{M}_\lambda$	$\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現，Verma 表現 (4.9 節)
$\Phi_\lambda(z)$	カレントに対する primary 場 (4.9 節)
$\Theta_{\lambda,k}$	格子テータ関数 (4.9 節)
$Q,\ Q^\vee,\ P$	ルート格子，コ・ルート格子，重み格子 (4.9 節)
χ_λ	可積分表現 L_λ の指標 (4.9 節)

5 章

$a(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$	boson 場［式 (5.1)］
$s(z)$, Q	遮蔽カレント［式 (5.14)］，遮蔽作用素［式 (5.15)］
x^α $(\alpha \in \Delta_+)$	上三角部分群の座標［式 (5.52)］
$a_i(z) = \varphi_i'(z)$	$\mathfrak{h}$ に値をとる $U(1)^l$ カレント (5.4 節)
$\beta_\alpha(z)$, $\gamma^\alpha(z)$	boson 場 $(\alpha \in \Delta_+)$ (共形次元 1,0) (5.4 節)
$b_{ij} = (\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee)$	標準内積の成分 (5.4 節)
$s_i(z)$, Q_i	遮蔽カレント，遮蔽作用素 (5.5 節)
$E_i(z), H_i(z), F_i(z)$	Chevalley 生成元に対応するカレント (5.5 節)
z_a $(a = 1, \ldots, n)$	KZ 方程式の解の独立変数 (5.6 節)
t_i $(i = 1, \ldots, m)$	KZ 方程式の解の積分変数 (5.6 節)
Q_i, S_i, α_i	変数 t_i に対応する作用素，単純ルート［式 (5.101)］
l_λ	積分表示の差積部分［式 (5.103)］
$I = (I_1, \ldots, I_n)$	$\{1, 2, \ldots, m\}$ の順序つき分割［式 (5.106)］
$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$	超幾何関数 (5.8 節)
$\Gamma(z)$	ガンマ関数 (5.8 節)

6 章

q, τ, x, z	$q = e^{2\pi i\tau}$, $x = e^{2\pi iz}$ (6.1 節)
S, T	モジュラー変換 $SL(2, \mathbf{Z})$ の生成元 (6.1 節)
$\vartheta_i(z, \tau)$, ϑ_i	Jacobi テータ関数，テータ定数 (6.1 節)
η	Dedekind エータ関数 (6.1 節)
$\widetilde{T}(x)$, $\widetilde{L}_n$	トーラス上のストレステンソル (6.3 節)
$E_k(z)$, $\widetilde{E}_k(x)$	Eisenstein の関数 (6.3 節)
$\Theta[s](\boldsymbol{z}\|\Omega)$	Riemann テータ関数，$[s] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (6.4 節)
$\alpha_i, \beta_i \in H_1(\Sigma, \mathbf{Z})$	Riemann 面 Σ のホモロジーの標準基底 (6.4 節)
$\tau(t)$	KP 方程式のタウ関数 (6.4 節)
${N_{ij}}^k$	フュージョン係数 (6.5 節)
${S_i}^j$	モジュラー変換行列 (6.5 節)
i (i^*)	$\widehat{\mathfrak{g}}$ の (双対) 表現のラベル (6.5 節)

7 章

$W(x)$	スーパーポテンシャル (7.2 節)
$F(t)$	プレポテンシャル (7.2 節)
η_{ij}	平坦計量 (7.2 節)
${C_{ij}}^k(t)$	変形カイラルリングの係数 (7.2 節)
$h_{p,q} = \mathrm{dim} H^{p,q}(X)$	Kähler 多様体 X の Hodge 数 (7.4 節)
$Z(\beta)$	分配関数, $\beta = 1/T$ (温度の逆数) [式 (7.94)]
K	$K = \beta J$ [式 (7.95)]
Γ, Γ^*	平面グラフ, 双対グラフ (7.5 節)
sh, ch, th	双曲線関数 (7.5 節)
c, s, t	$c = \mathrm{ch}(2K)$, $s = \mathrm{sh}(2K)$, $t = \mathrm{th}\, K$ (7.5 節)
$\sigma(x)$ $(x \in \Gamma)$	Ising 模型のスピン変数 (=秩序場) (7.5 節)
$\mu(x^*)$ $(x^* \in \Gamma^*)$	Ising 模型の無秩序場 (7.6 節)
$\psi_i(x)$, $C_a(x)$	格子上の fermion 場 (7.6 節)
$\{\ ,\ \}$	Poisson 括弧 (7.8 節)
$H = g \int dz \Phi(z)$	摂動項, g は結合定数 ($\neq$ 種数) (7.9 節)

1 章

作用素の代数

本章は，次章以降の種々の計算のための warming-up であり，非可換量 (行列や微分作用素など) の計算に慣れることを目標とする．交換子に関する諸公式，Wick の定理，Grassmann 積分などは，以下で何度も用いる．使って覚えるという面もあるので，最初はざっと読み飛ばし，必要に応じて参照してもよい．

1.1 交換子

非可換な**代数** $\mathcal{A}$ を考えよう．$A, B \in \mathcal{A}$ には和 $A+B$，積 AB，スカラー倍 cA ($c \in \mathbf{C}$) が定まり，分配則，結合則などが成り立つと仮定するが，積の可換性 ($AB = BA$) は仮定しない．例として，適当な次数の正方行列の全体や微分作用素のなす代数を念頭においている．積の非可換性の度合を示す量として次の**交換子**が重要な働きをする．

$$[A, B] = AB - BA \tag{1.1}$$

以下の性質は，どれもこの定義より簡単に確かめられる．

- **双線形性**：

$$\begin{aligned} [aA + bB, C] &= a[A, C] + b[B, C], \\ [A, bB + cC] &= b[A, B] + c[A, C]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

- **反対称性**：

$$[A, B] = -[B, A]. \tag{1.3}$$

- **Jacobi 恒等式**：

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \tag{1.4}$$

• **Leibniz 則**：

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]. \tag{1.5}$$

ここに，$a, b, c \in \mathbf{C}$, $A, B, C \in \mathcal{A}$ である．

一般に，ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ において，括弧積とよぶ演算

$$[\ ,\ ]:\ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

が性質 (1.2), (1.3), (1.4) ($A, B, C \in \mathfrak{g}$) を満たすように与えられたとき，$\mathfrak{g}$ を **Lie 代数**という．一般の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，式 (1.1) が意味をもつような非可換代数が普遍的に構成され，これを $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ という．式 (1.5) も包絡環 $U(\mathfrak{g})$ において意味をもつ[1]．

ところで，線形写像 $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ であって

$$\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B) \tag{1.6}$$

を満たすものを $\mathcal{A}$ の**微分**というが，線形性と Leibniz 則は「交換子をとる」という演算

$$\mathrm{ad}\ A:\ B \mapsto [A, B] \tag{1.7}$$

が，微分とみなせることを意味している．実際，次の公式が成り立つ．

$$[A, B_1 B_2 \cdots B_n] = \sum_{i=1}^{n} B_1 \cdots B_{i-1}[A, B_i]B_{i+1} \cdots B_n \tag{1.8}$$

とくに

$$\begin{aligned} [A, B^2] &= [A, B]B + B[A, B], \\ [A, B^3] &= [A, B]B^2 + B[A, B]B + B^2[A, B] \end{aligned} \tag{1.9}$$

である．また，B に逆元 B^{-1} がある場合には $[A, BB^{-1}] = [A, 1] = 0$ を変形して

$$[A, B^{-1}] = -B^{-1}[A, B]B^{-1} \tag{1.10}$$

などとなる．これらの式で，右辺の $[A, B]$ と B は必ずしも可換ではないので

$$[A, B^n] = n[A, B]B^{n-1} \tag{1.11}$$

とはならないが，$[A, B]$ が B と可換であればこれも正しい．

ここで，有用な公式を与えておこう．

---

1) まずは，交換子などの基本的計算技術に慣れることを目標としており，Lie 代数とか包絡環などについての概念的・一般的な知識は仮定していない．以降も，無定義語は気にせずに読み進めてほしい．

$$e^A B e^{-A} = e^{\mathrm{ad}\,A}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}\ A)^n(B) \tag{1.12}$$

ただし

$$(\mathrm{ad}\,A)^n(B) = [A,[A,\ldots,[A,[A,B]]\ldots]] \tag{1.13}$$

(括弧は n 重) である．とくに $[A,B]$ が A と可換ならば

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] \tag{1.14}$$

となる．

(1.12) を示すため，$F = F(t) = e^{tA}Be^{-tA}$ とおくと，

$$\frac{d^n}{dt^n}F(0) = (\mathrm{ad}\ A)^n(B)$$

となり，Taylor の公式より

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(\mathrm{ad}\ A)^n(B), \tag{1.15}$$

よって，$t=1$ とすれば求める式を得る．

さて，$B \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\widetilde{B} = e^A B e^{-A} = e^{\mathrm{ad}\,A}(B)$$

と書くことにすれば，

$$\widetilde{B+C} = \widetilde{B} + \widetilde{C}, \qquad \widetilde{BC} = \widetilde{B}\widetilde{C} \tag{1.16}$$

となり，写像 $e^{\mathrm{ad}\,A} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ は代数の同型を与える．より一般に，(性質の良い関数 f について) $\widetilde{f(B)} = f(\widetilde{B})$ が成り立つ．これより

$$e^A e^B e^{-A} = e^{\widetilde{B}} = e^{B+[A,B]+\frac{1}{2}[A,[A,B]]+\cdots} \tag{1.17}$$

であり，とくに $[A,B]$ が A と可換ならば

$$e^A e^B e^{-A} = e^{\widetilde{B}} = e^{B+[A,B]}, \tag{1.18}$$

さらに $[A,B]$ が B とも可換ならば，この右辺は $e^{[A,B]}e^B$ とも書ける．すなわち，$[A,B]$ が A, B と可換ならば，

$$e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A \tag{1.19}$$

となる．この式は，以下でしばしば用いられる．

1.2 微分作用素の代数

行列以外に，交換子の活躍するもう一つの重要な具体例をみておこう．n 個の変数 $x_1, \ldots, x_n$ の多項式の全体を $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ (以下単に $\mathbf{C}[x]$) と書く．$\mathbf{C}[x]$ の元 $f = f(x)$ は次のような有限和である．

$$f(x) = \sum_{i_1, \ldots, i_n \geq 0} c_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \tag{1.20}$$

この空間 $\mathbf{C}[x]$ は，通常の和とスカラー倍によって無限次元ベクトル空間となる．

ここで，$\mathbf{C}[x]$ に作用する線形作用素として次のものを考える．

$$x_i : f(x) \mapsto x_i f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} : f(x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \tag{1.21}$$

これらの線形作用素 x_i, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ には，和やスカラー倍はもちろん，作用素どうしの積も定義される．この場合も，積は必ずしも可換ではない．例えば，積 $\dfrac{\partial}{\partial x_i} x_j$ と $x_j \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ の差を計算してみると，

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, x_j\right] f = \frac{\partial}{\partial x_i} x_j f - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} f = \delta_{ij} f \tag{1.22}$$

となる．ここで記号 δ_{ij} は **Kronecker** の δ で，$i = j$ のとき 1，それ以外は 0 を表す．この式は，任意の多項式 $f \in \mathbf{C}[x]$ に対して成り立つ，という意味で，$\mathbf{C}[x]$ に作用する作用素の関係式 $\left[\dfrac{\partial}{\partial x_i}, x_j\right] = \delta_{ij}$ を表す．同様にして得られる交換関係をまとめると

$$[x_i, x_j] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, x_j\right] = \delta_{ij} \tag{1.23}$$

となる．この関係式は，Heisenberg (ハイゼンベルグ) 代数を定義する基本関係式で，量子力学において正準交換関係といわれるものと本質的に同じである．

x_i および $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ から，それらの積，和，スカラー倍を (有限回) 繰り返して組み立てられるものも，すべて $\mathbf{C}[x]$ の線形作用素を定める．

関係式 (1.23) を使うと，こうして得られる任意の作用素は，一意的に

$$D = \sum_{i_1, \ldots, i_n \geq 0} c_{i_1, \ldots, i_n}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i_n} \tag{1.24}$$

という形に表すことができる．この形，つまり，(掛け算) × (微分) の和の形は，

微分作用素の**正規形**といわれる．なお，$i_1, \ldots, i_n$ がすべて 0 の場合は微分ではなく単なる掛け算作用素であるが，これも 0 階の特別な微分作用素と考える．

例えば，微分作用素 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ の p 乗と掛け算作用素 $f(x)$ の積の正規形は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^p f = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{p-k} \tag{1.25}$$

となる．ここに，

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} \tag{1.26}$$

は二項係数である．

微分作用素を組み立てるとき，積，和，スカラー倍を有限回と断わったが，無限回でも問題なく作用できる場合もある．例えば，作用する相手が多項式のように性質の良い関数であれば，

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x_i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n \tag{1.27}$$

のような作用素も問題なく定義できる．実際，Taylor の定理により

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x_i}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(x) = f(x_1, \ldots, x_i + a, \ldots, x_n) \tag{1.28}$$

となる．つまり，$e^{a\frac{\partial}{\partial x_i}}$ は $x_i \mapsto x_i + a$ というズラシの作用素である．作用素の関係式として書けば，

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x_i}} f(x) = f(x_1, \ldots, x_i + a, \ldots, x_n) e^{a\frac{\partial}{\partial x_i}} \tag{1.29}$$

となる．式 (1.29) では，式 (1.28) と異なり，$f(x)$ を掛け算作用素とみていることに注意してほしい．

1.3 Wick の定理

$\mathcal{A}$ を $P = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $Q = x$ の生成する非可換な代数とする．一方で p, q を可換な変数とし，$F(p, q)$ を p, q の任意の多項式とする．このとき，$F(p, q)$ の変数を

$$q \mapsto Q = x, \qquad p \mapsto P = \frac{\partial}{\partial x} \tag{1.30}$$

と置き換えて，非可換な代数 $\mathcal{A}$ の元に読み直すことが Schrödinger (シュレー

ディンガー) にはじまる伝統的な量子化の方法である[2). しかし，この量子化は一意的ではない．例えば，$F = pq$ の場合，これを pq とみるか qp とみるかによって

$$pq \mapsto PQ = QP + 1, \qquad qp \mapsto QP \tag{1.31}$$

という違いが生じる．このような不定性を固定する一つの処方箋として，**正規積** $: :$ がある．これは，可換量 $F(p,q)$ に対して，その正規積とよばれる非可換量 $:F(p,q): \in \mathcal{A}$ を与えるもので，その対応 $F \mapsto :F:$ は，線形性と，次の関係式により定義する．

$$:qF(p,q): = Q:F(p,q):, \quad :F(p,q)p: = :F(p,q):P, \quad :1: = 1 \tag{1.32}$$

ここでは説明の便宜上，可換な量 p, q と非可換な量 P, Q の記号を変えたが，定義により，記号 $: :$ の内側にあるのは可換な量，外側にあるのは非可換量と決まっているので，両者に同じ記号 (例えば P, Q) を用いても混乱のおそれはない．本書でも以下ではその流儀に従うことにする．例えば

$$:(P+Q)^2: = :P^2 + 2QP + Q^2: = P^2 + 2QP + Q^2 \tag{1.33}$$

といったぐあいである．要するに，「$: :$ の中では可換な量と思って入れ換えをし，各項を (Q の式) $\times$ (P の式) の順序 (正規形) に直す．しかる後に $: :$ をはずして非可換量に読み替える」というのが正規積の処方箋である．以上の話は，変数 Q_i, P_i $(i \in I)$ が複数ある場合も同様である．

本節の主題である Wick (ウィック) の定理を述べるため，正規積の他にもう一つ縮約という演算を定義する．A, B を $P_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $Q_i = x_i$ $(i \in I)$ の任意の線形結合とする．このとき，例えば

$$A = \sum_{i \in I} (u_i P_i + v_i Q_i) \qquad (u_i, v_i \in \mathbf{C}) \tag{1.34}$$

について，これを微分部分 A_+ と掛け算部分 A_- に分けて

$$A_+ = \sum_{i \in I} u_i P_i, \qquad A_- = \sum_{i \in I} v_i Q_i \tag{1.35}$$

と書く．この記号で

---

2) 次元と Hermite 性を考慮して，$p \mapsto \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ ($\hbar$ は Planck 定数 h を 2π で割ったもの，i は虚数単位) とするのが物理の習慣である．

$$c(A,B) = [A_+, B_-] \tag{1.36}$$

とおき，これを A, B の**縮約** (contraction) という．なお，$c(A,B)$ は A,B について線形である．

この正規積および縮約の記号を用いると，P_i, Q_i $(i \in I)$ の任意の線形結合 A,B に対して，

$$:e^A::e^B: = e^{c(A,B)} :e^{A+B}: \tag{1.37}$$

が成り立つ．これを **Wick の定理**という．

証明. 正規積の定義により，

$$:e^A: = :e^{A_+ + A_-}: = e^{A_-} e^{A_+}, \tag{1.38}$$

したがって，

$$:e^A::e^B: = e^{A_-} e^{A_+} e^{B_-} e^{B_+}. \tag{1.39}$$

この式の右辺で 2, 3 番目の因子が正規積の順序になっていないので，これを入れ換えると，

$$e^{A_+} e^{B_-} = e^{[A_+, B_-]} e^{B_-} e^{A_+}. \tag{1.40}$$

ゆえに，$c(A,B) = [A_+, B_-]$ に注意すれば，

$$:e^A::e^B: = e^{c(A,B)} e^{A_-} e^{B_-} e^{A_+} e^{B_+} = e^{c(A,B)} :e^{A+B}: \tag{1.41}$$

となり，式 (1.37) が示された． □

この式 (1.37) を，応用上便利な形に書き替えておこう．A_r $(r = 1, 2, \ldots)$ を P_i, Q_i $(i \in I)$ の線形結合とする．$x_r, y_r \in \mathbf{C}$ をパラメータとして $A = \sum_r x_r A_r$, $B = \sum_s y_s A_s$ とおくと，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &:\exp\left(\sum_r x_r A_r\right)::\exp\left(\sum_s y_s A_s\right): \\ &\quad = \exp\left(\sum_{r,s} x_r y_s c(A_r, A_s)\right) :\exp\left(\sum_r (x_r + y_r) A_r\right):. \end{aligned} \tag{1.42}$$

これを x_r, y_s 等で何回か微分して $x = y = 0$ とおくと

$$:A_r::A_s A_t: = c(A_r, A_s) :A_t: + c(A_r, A_t) :A_s: + :A_r A_s A_t:, \tag{1.43}$$

$$
\begin{aligned}
:A_rA_s::A_tA_u: &= c(A_r,A_t)c(A_s,A_u)+c(A_r,A_u)c(A_s,A_t)\\
&\quad + c(A_r,A_t):A_sA_u: + c(A_r,A_u):A_sA_t:\\
&\quad + c(A_s,A_t):A_rA_u: + c(A_s,A_u):A_rA_t:\\
&\quad + :A_rA_sA_tA_u:
\end{aligned} \tag{1.44}
$$

などが得られる．

また公式 (1.37) を繰り返し用いると

$$
\begin{aligned}
:e^{A_1}::e^{A_2}::e^{A_3}: &= e^{c(A_1,A_2)}:e^{A_1+A_2}::e^{A_3}:\\
&= e^{c(A_1,A_2)}e^{c(A_1+A_2,A_3)}:e^{A_1+A_2+A_3}:\\
&= e^{c(A_1,A_2)+c(A_1,A_3)+c(A_2,A_3)}:e^{A_1+A_2+A_3}:
\end{aligned} \tag{1.45}
$$

となり，より一般には

$$
:e^{A_1}:\cdots:e^{A_n}: = \prod_{r<s} e^{c(A_r,A_s)}:\prod_r e^{A_r}: \tag{1.46}
$$

が得られる．さらにここで $A_r \to x_rA_r$ とおいて，両辺の $x_1x_2\cdots x_r$ の係数を比較すれば，

$$
A_1A_2\cdots A_r = \sum\left(\prod_{\text{対}} c(A_i,A_j):\prod_{\text{残り}} A_r:\right) \tag{1.47}
$$

を得る．ここに，和は $\{1,2,\ldots,r\}$ をいくつかの対 $(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots$ と，その残り $r_1,r_2,\ldots$ に分ける分け方のすべてにわたってとる．例えば，

$$
\begin{aligned}
A_1 &= :A_1:,\\
A_1A_2 &= c(A_1,A_2)+:A_1A_2:,\\
A_1A_2A_3 &= [\,c(A_1,A_2):A_3:+(2\,\text{項})\,]+:A_1A_2A_3:,\\
A_1A_2A_3A_4 &= [\,c(A_1,A_2)c(A_3,A_4)+(2\,\text{項})\,]\\
&\qquad + [\,c(A_1,A_2):A_3A_4:+(5\,\text{項})\,]+:A_1A_2A_3A_4:
\end{aligned} \tag{1.48}
$$

である．

1.4 頂点作用素

無限個の変数 $t=(t_0,t_1,t_2,\ldots)$ と複素パラメータ k および z を用意する．このとき，t の関数に作用する頂点作用素 $V_k(z)$ を次で定める．

$$
\begin{aligned}
&V_k(z) = V_k^-(z)V_k^+(z),\\
&V_k^-(z) = \exp\left(k\sum_{n=0}^{\infty} z^n t_n\right),\\
&V_k^+(z) = \exp\left(k\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)\frac{\partial}{\partial t_n}\right),\\
&u_0(z) = \log z, \qquad u_n(z) = -\frac{z^{-n}}{n} \quad (n>0).
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

ここで，$u_n(z)$ は対数関数の展開係数

$$\log(z-w) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)w^n \tag{1.50}$$

である．

$V_k(z)$ は正規積の形をしている，すなわち，微分作用素部分 $V_k^+(z)$ が右側に，掛け算作用素部分 $V_k^-(z)$ が左側にある．

2 つの頂点作用素の積

$$V_l(w)V_k(z) = V_l^-(w)V_l^+(w)V_k^-(z)V_k^+(z) \tag{1.51}$$

を考える．この右辺において，中央の $V_l^+(w)V_k^-(z)$ が正規積

$$:V_l(w)V_k(z): = V_l^-(w)V_k^-(z)V_l^+(w)V_k^+(z) \tag{1.52}$$

の順序になっていない．そこでこれを直すと次が得られる．

$$V_l(w)V_k(z) = (w-z)^{kl} :V_l(w)V_k(z): \tag{1.53}$$

証明. $V_l^+(w) = e^A$, $V_k^-(z) = e^B$ の積の順序の入れ換えを計算する．

$$A = l\sum_{n=0}^{\infty} u_n(w)\frac{\partial}{\partial t_n}, \qquad B = k\sum_{n=0}^{\infty} z^n t_n \tag{1.54}$$

に対して

$$[A,B] = kl\sum_{n=0}^{\infty} u_n(w)z^n = kl\log(w-z) \tag{1.55}$$

が成り立つ．$[A,B]$ が A, B と可換であるから

$$e^A e^B = e^{[A,B]}e^B e^A = (w-z)^{kl}e^B e^A \tag{1.56}$$

となって求める結果を得る． □

同様の計算によって，3つ以上の頂点作用素について次が得られる．

$$V_{k_1}(z_1)\cdots V_{k_N}(z_N)=\prod_{1\le i<j\le N}(z_i-z_j)^{k_ik_j}:V_{k_1}(z_1)\cdots V_{k_N}(z_N): \tag{1.57}$$

1.5 反交換子

量子論では，交換子 $[A,B]=AB-BA$ は古典的に可換な量の量子的非可換性の度合を表していた．このように，古典的に可換な量は **boson** といわれる．これに対して **fermion** といわれる古典的には反可換な量も重要である[3]．**反可換**とは，$AB=-BA$ のように，符号つきで交換可能という意味である．$AB=-BA$ は，普通の数としては奇異にうつるかもしれないが，行列としては異常なものではなく，例えば，次のように簡単に実現できる．

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}. \tag{1.58}$$

さらに，量子化された fermion の非反可換性を表すものとして，**反交換子**

$$[A,B]_+=AB+BA \tag{1.59}$$

が定義される．このとき，反交換子の重要な性質として以下が成り立つ．

- **双線形性**：

$$\begin{aligned}[aA+bB,C]_+&=a[A,C]_++b[B,C]_+,\\ [A,bB+cC]_+&=b[A,B]_++c[A,C]_+.\end{aligned} \tag{1.60}$$

- **対称性**：

$$[A,B]_+=[B,A]_+. \tag{1.61}$$

- **Jacobi 恒等式**：

$$[A,[B,C]_+]+[B,[C,A]_+]+[C,[A,B]_+]=0. \tag{1.62}$$

---

3) boson B と fermion F が共存するときは，これらを可換 ($BF=FB$) とするのが普通である．

- **Leibniz 則**：

$$[A, BC] = [A, B]_+C - B[A, C]_+ . \tag{1.63}$$

Jacobi 恒等式や Leibniz 則で，一部の括弧が交換子になっているのは次の理由による．A, B, C を互いに反可換な量とすると，その積について

$$ABC = -ACB = CAB \tag{1.64}$$

となるので，AB と C は可換となる．このように，偶数個の fermion の積は boson と考えるのが自然なのである．

線形写像 $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ で

$$\delta(AB) = \delta(A)B + (-1)^{|A|}A\delta(B) \tag{1.65}$$

を満たすものを代数 $\mathcal{A}$ の**反微分**という．線形性と Leibniz 則は，$A \in \mathcal{A}$ で「(反)交換子をとる」という演算

$$\delta = \mathrm{ad}\ A :\ B \longmapsto AB - (-1)^{|B|}BA \tag{1.66}$$

が，反微分とみなせることを意味している．実際，次の公式が示される．

$$\delta(B_1B_2\cdots B_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_1\cdots B_{i-1}|}B_1\cdots B_{i-1}\delta(B_i)B_{i+1}\cdots B_n \tag{1.67}$$

ここで，符号 $(-1)^{|B_1\cdots B_{i-1}|}$ は，δ が B_i にぶつかるまでに途中で飛び越えた作用素 $B_1\cdots B_{i-1}$ の偶奇を表す．

boson や fermion を同時に含む場合にこれらをまとめて扱うために，考えている代数を，boson(偶) と fermion(奇) の 2 つの階級に分ける．

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \tag{1.68}$$

ここで，$\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ は，各々 fermion 的生成元の積を偶数個，奇数個含む項の和からなる．さらに，元 $A \in \mathcal{A}_i$ $(i = 0, 1)$ に対して $|A| = i$ と定める．

この一般的設定のもとで，再度 Wick の定理を述べておこう．$\mathcal{A}$ の生成元 a_i $(i \in I)$ にはその偶奇性 $|a_i| \in \{0, 1\}$ が定まっているとし，(反) 交換関係

$$[a_i, a_j]_\pm = h_{ij} \tag{1.69}$$

に従うとしよう．ここで

$$[A, B]_\pm = AB - (-1)^{|A||B|}BA \tag{1.70}$$

であり，$h_{ij}\in\mathbf{C}$ は，$|a_i||a_j|$ の偶奇に応じて反対称かまたは対称

$$h_{ji}=-(-1)^{|a_i||a_j|}h_{ij} \tag{1.71}$$

である．

$\mathcal{A}$ の生成元 a_i $(i\in I)$ の線形結合全体を W とし，W_+ の元どうしおよび W_- の元どうしは互いに (反) 可換となるような直和分解 $W=W_+\oplus W_-$ があるとしよう．すべての h_{ij} を 0 とおいて，$\mathcal{A}$ を (反) 可換化した代数を $\mathcal{A}_c$ とする．$\mathcal{A}_c$ から $\mathcal{A}$ への線形な写像 : : を

$$:a_-P:=a_-:P:,\quad :Pa_+:=:P:a_+,\quad :1:=1 \tag{1.72}$$

$(P\in\mathcal{A}_c,\ a_\pm\in W_\pm)$ で定める．これを**正規積**という．$a\in W$ の $W_\pm$ への分解を $a=a_++a_-$ $(a_\pm\in W_\pm)$ と表し，$a,b\in W$ の**縮約**を

$$c(a,b)=[a_+,b_-]_\pm \tag{1.73}$$

と定める．この正規積および縮約の記号を用いて，Wick の定理は次のように述べることができる．

記述を簡単にするため，互いに (反) 可換なパラメータ x_r, y_r $(i\in I)$ を用意する．各 $r\in I$ につき x_r,y_r は a_r と同じ偶奇性をもち，$[x_r,a_s]=[y_r,a_s]=0$ とする．このとき，x_ra_r は boson 的な作用素として扱うことができて，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}&:\exp\Bigl(\sum_r x_ra_r\Bigr)::\exp\Bigl(\sum_s y_sa_s\Bigr):\\&\quad=\exp\Bigl(\sum_{r,s}x_ry_sc(a_r,a_s)\Bigr):\exp\Bigl(\sum_r(x_r+y_r)a_r\Bigr):\end{aligned} \tag{1.74}$$

これを x_r,y_s で適当に微分して $x=y=0$ とおくと

$$:a_r::a_sa_t:=c(a_r,a_s):a_t:\pm c(a_r,a_t):a_s:+:a_ra_sa_t:, \tag{1.75}$$

$$\begin{aligned}:a_ra_s::a_ta_u:=&\pm c(a_r,a_t)c(a_s,a_u)\pm c(a_r,a_u)c(a_s,a_t)\\&\pm c(a_r,a_t):a_sa_u:\pm c(a_r,a_u):a_sa_t:\\&\pm c(a_s,a_t):a_ra_u:\pm c(a_s,a_u):a_ra_t:\\&+:a_ra_sa_ta_u:\end{aligned} \tag{1.76}$$

などを得る．ここで，$\pm$ は a_r たちの順序の違いにより生ずる符号で，例えば，第 2 式右辺の初項 $c(a_r,a_t)c(a_s,a_u)$ は左辺と比べて a_s,a_t の順序が変わってい

るので，対応する符号は

$$(-1)^{|a_s||a_t|} \tag{1.77}$$

となる．このように，fermion を含む場合でも Wick の定理は boson の場合とほとんど同じで，違いは符号の変化のみに現れる．

同様に，a_1, a_2, a_3 を fermion とすれば，

$$\begin{aligned}
&a_1a_2 = c(a_1, a_2) + :a_1a_2:\,, \\
&a_1a_2a_3 = [c(a_1, a_2)a_3 - c(a_1, a_3)a_2 + c(a_2, a_3)a_1] + :a_1a_2a_3:\,, \\
&a_1a_2a_3a_4 = [c(a_1, a_2)c(a_3, a_4) - c(a_1, a_3)c(a_2, a_4) + c(a_1, a_4)c(a_2, a_3)] + \cdots
\end{aligned} \tag{1.78}$$

などとなる．

1.6 外積代数と積分

V をベクトル空間とし，$e_1, \ldots, e_N$ をその基底とする．このとき，V の k 次の外積空間 $\wedge^k V$ とは

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N) \tag{1.79}$$

の形の元の線形結合からなるベクトル空間で，次元は $\dim \wedge^k V = \binom{N}{k}$ である．なお，$k < 0$ および $k > N$ のときは $\wedge^k V = \{0\}$ とする．

$\wedge^k V$ をすべて集めたものを

$$\wedge^* V = \bigoplus_{k=0}^{N} \wedge^k V \tag{1.80}$$

とする．この次元は 2^N である．

記号 $\wedge$ は，反対称

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i, \qquad e_i \wedge e_i = 0, \tag{1.81}$$

かつ双線形に拡張されて，外積

$$\wedge:\ \wedge^* V \times \wedge^* V \to \wedge^* V \tag{1.82}$$

を定める．ここで双線形で反対称ということは，$X_{ij} \in \mathbf{C}$ を任意係数として，

$$(X_{11}e_1 + X_{12}e_2) \wedge (X_{21}e_1 + X_{22}e_2) = (X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21})e_1 \wedge e_2 \tag{1.83}$$

などの計算が成り立つということである.

外積空間 $\wedge^* V$ の元を **Grassmann 数**といい, その $\wedge$ 積による代数を **Grassmann 代数**という. 以下では, 簡単のため $\wedge$ の記号を使わないで, 単に $ab = a\wedge b$ によって外積を表すこととする.

次に, $\wedge^* V$ 値関数 $f(e_1, \ldots, e_N)$ を考える.

$$f(e_1, \ldots, e_N) = f + \sum_{i=1}^{N} f_i e_i + \sum_{1\le i<j\le N} f_{ij} e_i e_j + \cdots + f_{12\cdots N} e_1 e_2 \cdots e_N \tag{1.84}$$

と展開できるが, これは Grassmann 変数関数の Taylor 展開と考えられる. 偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial e_i}$ の作用を, 基底 $e_j e_k \cdots e_l$ に対しては

$$\frac{\partial}{\partial e_i}(e_j e_k \cdots e_l) = \delta_{ij} e_k \cdots e_l - e_j \frac{\partial}{\partial e_i}(e_k \cdots e_l), \tag{1.85}$$

それ以外は線形に拡張して定義する. これは反微分となる. 上記の展開 (1.84) は

$$f_{ij\cdots k} = \frac{\partial}{\partial e_k} \cdots \frac{\partial}{\partial e_j} \frac{\partial}{\partial e_i} f(e_1, \ldots, e_N)\Big|_{e_l=0} \tag{1.86}$$

であるので, たしかに式 (1.84) は Taylor 展開公式の類似になっている.

また, 基底への作用により確かめられるように

$$[e_i, e_j]_+ = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial e_i}, \frac{\partial}{\partial e_j}\right]_+ = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial e_i}, e_j\right]_+ = \delta_{ij} \tag{1.87}$$

の関係が成り立つ. すなわち e_i, $\dfrac{\partial}{\partial e_i}$ は微分作用素の交換関係 (1.23) をすべて反交換関係に代えたものを満たす. これは **Clifford 代数**ともよばれる.

次に Grassmann 数の積分を考えよう. $\wedge^N V$ は 1 次元なので, その元は定数倍を除いて一意である. その一つ ω を固定して**体積要素**という. $\wedge^* V$ の任意の元に対して, その体積要素の係数を対応させる線形写像を

$$\int : \wedge^* V \to \mathbf{C} \tag{1.88}$$

と書いて **Grassmann 積分**とよぶ. 積分とよぶ心は, 任意の $f(e_1, \ldots, e_N)$ に対して次の公式が成り立つことである.

$$\int \frac{\partial}{\partial e_i} f(e_1, \ldots, e_N) = 0 \tag{1.89}$$

ここで, $m = 0, 1, \ldots, N$ に対して, ベクトル $\langle m| \in (\wedge^* V)^*$, および $|m\rangle \in$

$\wedge^* V$ を次で定める[4].

$$\langle m| = \int e_N e_{N-1}\cdots e_{m+1}, \qquad |m\rangle = e_m e_{m-1}\cdots e_1 \tag{1.90}$$

この定義より直ちに,

$$\begin{aligned} &\langle m|e_i = 0 \quad (i > m), \quad \langle m|\frac{\partial}{\partial e_i} = 0 \quad (i \le m),\\ &e_i|m\rangle = 0 \quad (i \le m), \quad \frac{\partial}{\partial e_i}|m\rangle = 0 \quad (i > m), \end{aligned} \tag{1.91}$$

および

$$\begin{aligned} &\langle m|e_m = \langle m-1|, \quad \langle m|\frac{\partial}{\partial e_{m+1}} = \langle m+1|,\\ &e_{m+1}|m\rangle = |m+1\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial e_m}|m\rangle = |m-1\rangle, \end{aligned} \tag{1.92}$$

さらに,体積要素を $\omega = e_N\cdots e_2 e_1$ ととることにより,

$$\langle m \mid n\rangle = \delta_{m,n} \tag{1.93}$$

が成り立つ.なお (1.91) は,$\langle m|$, $|m\rangle$ を規格化定数を除いて一意に特徴づける.

任意の作用素 $\mathcal{O} = \mathcal{O}\left(e_1,\ldots,e_N,\frac{\partial}{\partial e_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial e_N}\right)$ に対して,その期待値

$$\langle m|\mathcal{O}|n\rangle \tag{1.94}$$

は,条件 (1.91), (1.92), (1.93) により一意に定まる.例として,後に有用な公式を一つ導いておこう.形式的に $N=\infty$ の場合を考え,$n<1$ のとき $e_n=0$ と約束して,$n\in\mathbf{Z}$ に対し

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} e_{k-n}\frac{\partial}{\partial e_k} \tag{1.95}$$

と定める.このとき,交換関係

$$[a_n, e_m] = e_{m-n} \tag{1.96}$$

が成り立つ.これより,

$$\begin{aligned} &H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n, \qquad e(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n z^n,\\ &\xi(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n, \qquad e^{\xi(t,z)} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n \end{aligned} \tag{1.97}$$

4) 以下,Dirac に従って,横ベクトル的なもの (bra) を $\langle A|$,縦ベクトル的なもの (ket) を $|B\rangle$ のように表し,そのペアリング (bracket) を $\langle A|B\rangle$ と書く.

とおけば,

$$e^{H(t)}e(z)e^{-H(t)} = e^{\xi(t,z)}e(z),$$
$$e^{H(t)}e_n e^{-H(t)} = e_n + h_1 e_{n-1} + \cdots + h_{n-1}e_1 \tag{1.98}$$

となる. したがって次が成り立つ.

$$\begin{aligned}&\left\langle p \,\middle|\, e^{H(t)} e_{n_1} \cdots e_{n_p} \,\middle|\, 0 \right\rangle \\ &\quad = \left\langle p \,\middle|\, (h_{n_1-p}e_p + \cdots + h_{n_1-1}e_1) \cdots (h_{n_p-p}e_p + \cdots + h_{n_p-1}e_1) \,\middle|\, 0 \right\rangle \\ &\quad = \det\left(h_{n_i-j}\right)_{1\le i,j\le p}\end{aligned} \tag{1.99}$$

ここで $\det X$ は行列 X の行列式を表す.

$N \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_p \geq 1$ を満たす数列 $n_1, \ldots, n_p$ に対して, 対応するベクトル $e_{n_1} \cdots e_{n_p} \left| 0 \right\rangle$ の全体は $\wedge^p V$ の基底をなす. このとき $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $\lambda_i = n_i - (p+1-i)$ は $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$ を満たし, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ の**分割**となる. 式 (1.99) の右辺

$$s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i-i+j}\right)_{1\le i,j\le p} \tag{1.100}$$

を, 分割 λ に対する **Schur 多項式**という.

最後に 2 種の fermion の系をみておこう. 2 つのベクトル空間 V, W を考え, その基底をそれぞれ $b_1, \ldots, b_M$, $c_1, \ldots, c_N$ としよう. 直和空間 $V \oplus W$ の外積代数を $A = \wedge^*(V \oplus W)$ と書く. A はベクトル空間としては 2^{M+N} 次元である. A の元は b_i, c_i の関数 $f = f(b,c)$ とみなされる. このうち

$$f(z^{-1}b_1, \ldots, z^{-1}b_M, zc_1, \ldots, zc_N) = z^p f(b,c) \tag{1.101}$$

を満たすものを**電荷** p の同次関数とよぶ[5]. その全体を A^p とすると

$$\sum_{p=-M}^{N} (\dim A^p) z^p = (1+z^{-1})^M (1+z)^N \tag{1.102}$$

が成り立つ.

$M \times N$ 行列 $F = \left(F_{ij}\right)_{i=1,\ldots,M,\ j=1,\ldots,N}$ を固定し

$$S(b,c) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} b_i F_{ij} c_j \tag{1.103}$$

とおく. A の任意の元 $f = f(b,c)$ に対して, その真空期待値を

5) 「電荷」は charge の訳. electric charge (電荷), magnetic charge (磁荷) など charge (荷) にもいろいろあるが, 単に「荷」というのも落ち着かないので「電荷」としている.

$$\langle f \rangle = \int f \exp(S) \tag{1.104}$$

で定義する．

簡単な場合として $M = N$ で $\det(F) \neq 0$ の場合から考えよう．体積要素の規格化を適当に選ぶと次が成り立つ．

$$Z = \langle 1 \rangle = \det F \tag{1.105}$$

証明． $S = \sum_{ij} b_i F_{ij} c_j = \sum_i b_i (Fc)_i$, $(Fc)_i = \sum_j F_{ij} c_j$ と書けば，

$$e^S = \exp\left(\sum_{i=1}^N b_i (Fc)_i\right) = \prod_{i=1}^N e^{b_i (Fc)_i}$$

であるので

$$\int e^S = \int \prod_{i=1}^N e^{b_i (Fc)_i} = \int \prod_{i=1}^N (1 + b_i (Fc)_i) = \int \prod_{i=1}^N b_i (Fc)_i, \tag{1.106}$$

したがって

$$\int e^S = \int \sum_{i_1, \ldots, i_N} b_1 F_{1 i_1} c_{i_1} \cdots b_N F_{N i_N} c_{i_N} = \det F \tag{1.107}$$

となる．ただし，体積要素を $\int b_1 c_1 \cdots b_N c_N = 1$ と規格化した． □

次に，x_i, y_j を互いに反可換な Grassmann 変数 (b_i,c_j たちとは可換) とし，

$$bx = \sum_i b_i x_i, \qquad yc = \sum_j y_j c_j$$

および

$$xGy = \sum_{ij} x_i G_{ij} y_j, \qquad G_{ij} = (F^{-1})_{ji}$$

とする．このとき次が成り立つ．

$$\left\langle e^{bx+cy} \right\rangle = Z e^{xGy} \tag{1.108}$$

証明． まず，被積分関数の指数の中身を平方完成する．

$$\begin{aligned} S + bx + yc &= bFc + bx + yc \\ &= (b + yF^{-1}) F (c + F^{-1} x) - yF^{-1} x \end{aligned} \tag{1.109}$$

これを exp の肩に乗せて積分すれば

$$\left\langle e^{bx+cy}\right\rangle = e^{-yF^{-1}x}\int e^{(b+yF^{-1})F(c+F^{-1}x)} \tag{1.110}$$

となる．Grassmann 積分は積分変数の並行移動 $b_i \mapsto b_i + k_i$, $c_i \mapsto c_i + l_i$ で変わらないので，右辺の積分は Z に等しい．ここで，G の定義より

$$-yF^{-1}x = xGy$$

である．よって (1.108) が示された. □

式 (1.108) を x_i, y_j 変数について展開して係数を比較することにより，

$$Z^{-1}\left\langle b_i c_j\right\rangle = G_{ji} = (F^{-1})_{ij}, \tag{1.111}$$

$$Z^{-1}\left\langle b_i b_j c_k c_l\right\rangle = G_{jk}G_{il} - G_{ik}G_{jl}, \tag{1.112}$$

さらに，一般の $2m$ 点関数は 2 点関数の行列式として表され，

$$Z^{-1}\left\langle b_{i_1}\cdots b_{i_m}c_{j_m}\cdots c_{j_1}\right\rangle = \det\left(Z^{-1}\left\langle b_{i_p}c_{j_q}\right\rangle\right)_{1\le p,q\le m} \tag{1.113}$$

が成り立つ．

次に，$N \neq M$ や $\det F = 0$ の場合には

$$Z = \int e^S = 0 \tag{1.114}$$

である．一般に，$n = M - p = N - q$ ならば

$$\boxed{\left\langle b_{i_1}\cdots b_{i_p}c_{j_q}\cdots c_{j_1}\right\rangle = v\det F_{(i_1,\ldots,i_p),(j_1,\ldots,j_q)}} \tag{1.115}$$

となり，それ以外は 0 である．ここに $\det F_{IJ}$ は $M \times N$ 行列 $\left(F_{ij}\right)$ から $i \in I$ および $j \in J$ を除いた $n \times n$ 行列の行列式 (余因子) であり，v は体積要素の取り方にのみに依存する定数である[6]．

証明. $f = b_{i_1}\cdots b_{i_p}c_{j_q}\cdots c_{j_1}e^S$ とすると，$f(z^{-1}b, zc) = z^{q-p}f(b,c)$. 一方，体積要素 ω の電荷は $N-M$ であるので，積分が消えないためには $q-p = N-M$ でなければならない．$n = M-p = N-q$ の場合は，S の中で $b_{i_1},\ldots,b_{i_p}$ および $c_{j_1},\ldots,c_{j_q}$ を 0 とおいたものを S_{red} とすれば

$$\left\langle b_{i_1}\cdots b_{i_p}c_{j_q}\cdots c_{j_1}\right\rangle = \int_{\mathrm{red}} e^{S_{\mathrm{red}}} \tag{1.116}$$

6) 線形写像 $F: W \to V$ に対して，$N - M = \dim W - \dim V = \mathrm{index}F = \dim\mathrm{Ker}F - \dim\mathrm{Coker}F$ である．そこで，期待値 (1.115) が 0 でないための必要条件を，$q - p = \mathrm{index}F$ と書くことができ，これは無限次元の場合にも意味をもつ．

となる．ここに $\int_{\mathrm{red}}$ は残りの n 個ずつの b, c 変数に関する積分で，体積要素を

$$\omega_{\mathrm{red}} = \frac{\partial}{\partial c_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial c_{j_q}} \frac{\partial}{\partial b_{i_p}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{i_1}} \omega \tag{1.117}$$

としたものである．したがって $M = N$ の場合に帰着し，求める結果 (1.115) を得る．□

$\wedge^p V$ の元 ξ は，V の適当な基底 $\{e_i\}$ で単項式

$$\xi = e_1 e_2 \cdots e_p \tag{1.118}$$

に書かれるとき**純テンソル**とよばれる．$Z_\xi = \langle \xi \rangle \neq 0$ なる任意の純テンソル ξ に対して

$$Z_\xi^{-1} \langle b_{i_1} \cdots b_{i_m} c_{j_m} \cdots c_{j_1} \xi \rangle = \det \left(Z_\xi^{-1} \langle b_{i_p} c_{j_q} \xi \rangle \right)_{1 \le p,q \le m} \tag{1.119}$$

である．

以上の結果は，自由 fermion とよばれる代数 (次章で扱う) についての Wick の定理と等価である．物理の言葉でいえば，ここでの扱いは経路積分の方法に対応する．これに対して，前節までの扱いは作用素形式とよばれる．

ついでに，自由 boson の Wick の定理も積分の観点から簡単にみておこう．

実変数 $x_1, \ldots, x_N$ の正値 2 次形式

$$S = \frac{1}{2} \sum_{ij} F_{ij} x_i x_j$$

に対して

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} dx_1 \cdots dx_N f(x) e^{-S} \tag{1.120}$$

とおく．F_{ij} は対称としておく．直交変換により F を対角化すれば

$$Z = \langle 1 \rangle = \left(\frac{\pi^N}{\det F} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.121}$$

が示される．また $t_1, \ldots, t_N$ を可換なパラメータとして

$$\left\langle \exp \left(\sum_i t_i x_i \right) \right\rangle = Z \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{ij} (F^{-1})_{ij} t_i t_j \right) \tag{1.122}$$

となることも，平方完成することによって簡単にわかる．これより，任意の相関関数 $\langle x_{i_1} \cdots x_{i_{2n}} \rangle / Z$ が $\langle x_i x_j \rangle / Z = (F^{-1})_{ij}$ の Haffnian によって与えられる．

$$\frac{1}{Z} \langle x_{i_1} \cdots x_{i_{2n}} \rangle = \mathrm{Hf}\left((F^{-1})_{ij} \right)_{i,j \in \{i_1, \ldots, i_{2n}\}} \tag{1.123}$$

ただし $\mathrm{Hf}(X)$ は $2n$ 次対称行列 (X_{ij}) の **Haffnian**

$$\mathrm{Hf}(X) = \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)} \tag{1.124}$$

を表す．例えば

$$Z\langle x_i x_j x_k x_l \rangle = \langle x_i x_j \rangle \langle x_k x_l \rangle + \langle x_i x_k \rangle \langle x_l x_j \rangle + \langle x_i x_l \rangle \langle x_j x_k \rangle \tag{1.125}$$

などとなる．

1.7 場と相関関数

場の理論の定式化は，作用原理に基づく方法が標準的である．この方法では，**作用 (積分)** とよばれる場の量の関数が基本的に重要である．通常，作用積分は，各点ごとの場の量と，その微分から構成される局所的な量の積分として表される．古典場の理論では，その作用が最小値となるという要請から，場の配位が決められる．例えば，n 次元空間 ($x^1, \ldots, x^n$ を局所座標とする) において，作用が場 $\varphi(x)$ とその偏微分 $\partial_\mu \varphi(x) = \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\mu}$ の関数として

$$S = \int dx^1 \cdots dx^n \mathcal{L}\left(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)\right) \tag{1.126}$$

で与えられる場合，S が最小となる必要条件として，**Euler-Lagrange 方程式**

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi(x))}\right) = 0 \tag{1.127}$$

が得られ，これが場を決める方程式となる．この作用原理に基づく定式化は次の利点がある．

- 複数 (多成分) の場を含む場合も単一の作用により統一的に記述できる．
- 理論のもつ対称性が作用の不変性として簡潔に表現される．

作用が場の量の 2 次式の場合には，Euler-Lagrange 方程式は線形方程式 (1 次の項を含めば線形非同次) となるので，扱いは比較的容易である．これが**自由場**とよばれるものである．

場の量子論でも，作用関数は基本的である．ここでは，作用の最小値を探すのではなく，すべての場の配位に関して，作用関数の値に応じた重みで平均を

とる，ということを考える．場の量の積の，この意味での平均値

$$\langle\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\rangle = \int \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)e^{-S(\varphi)} \tag{1.128}$$

を**相関関数**という．

量子論の場合も，自由場の理論は指数関数の肩に 2 次式を乗せた形の積分 (Gauss 積分) に帰着するので簡単に取り扱うことができる．本章で扱ったのは自由な boson や fermion の相関関数の計算であった．(実際には無限自由度の汎関数積分を考えるのだが精神は同じである.)

S に 3 次以上の項があると，自由場のように簡単には計算できない．通常使われる方法は，$-S$ を 2 次以下の自由場部分 $-S_F$ と 3 次以上の相互作用部分 S_I に分離して**摂動論的**に扱うことである．

すなわち，

$$\begin{aligned}\langle A\rangle_S &= \int Ae^{-S} = \int Ae^{-S_F}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S_I^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle AS_I^n\rangle_{S_F}.\end{aligned} \tag{1.129}$$

ここで，最後の $\langle\cdots\rangle_{S_F}$ は 2 次式 S_F に関する積分なので，Wick の定理により系統的に計算される．ほとんどの場合，級数 (1.129) は**漸近展開**となっており，近似的計算手段としては有効であるが，級数の和を正確に求めることは困難である．共形場の理論は，相関関数が正確に計算できる場の理論の興味深い例を与えている．

自由場は，相互作用をしない，つまり，場としての観測手段がないということでもあり，物理的に意味がないようであるが，例えば，摂動論にみられるように，難しい相互作用を扱うための補助手段として有効な道具となる．本書でも，自由場の理論を多いに活用する．

この節の最後に，**保存則と対称性**の関係，および，それらの相関関数による表現について述べておこう．物理系のもつ保存則は，その系の対称性に由来する．例えば，力学でよく知られているように，運動量，角運動量，エネルギーといった保存量は，それぞれ，空間並進，空間回転，および時間並進に関する系の対称性 (不変性) にその起源をもつ．こうした立場から，共形不変性とストレステンソルの関係を考察しておこう．議論を簡単にするため，正規直交座標 x_μ $(\mu = 1, 2)$ で考えることにする．

2 次元空間での無限小座標変換

$$x_\mu \to x_\mu + \delta x_\mu, \qquad \delta x_\mu = \xi_\mu(x) \tag{1.130}$$

に対して，作用 S の変化が

$$S \to S + \delta S, \qquad \delta S = \int d^2x \sum_{\mu,\nu=1}^{2} T_{\mu\nu}\partial_\mu \xi_\nu \tag{1.131}$$

で与えられるとしよう．この $T_{\mu\nu}$ を系のストレステンソルという．これについて，

$$\sum_{\mu=1}^{2} \partial_\mu T_{\mu\nu} = 0, \qquad T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \qquad \sum_{\mu=1}^{2} T_{\mu\mu} = 0 \tag{1.132}$$

を要求する．これらは，各々，並進 $\xi_\mu = c_\mu$ (定数)，回転 $\xi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \epsilon_{\mu\nu}x_\nu$，およびスケール変換 $\xi_\mu = cx_\mu$ に関する作用関数 S の不変性 ($\delta S = 0$) を導く．
複素座標 $z = x_1 + ix_2$ を導入し，対応して

$$\begin{aligned} T &= T_{zz} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy} - 2iT_{xy}), \\ \bar{T} &= T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy} + 2iT_{xy}), \\ \Theta &= T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(T_{xx} + T_{yy}) \end{aligned} \tag{1.133}$$

とおけば，並進，回転不変性から

$$\partial_{\bar{z}} T + \partial_z \Theta = 0, \qquad \partial_z \bar{T} + \partial_{\bar{z}} \Theta = 0 \tag{1.134}$$

となり，さらに，スケール変換不変であれば

$$\Theta = 0, \qquad \partial_{\bar{z}} T = \partial_z \bar{T} = 0 \tag{1.135}$$

が得られる．一般に，並進，回転，およびスケール変換は，角度を保つ変換 (= 共形変換) をなすが，とくに 2 次元では，これら (を局所的に考えたもの) は，かってな正則変換による等角写像という無限次元の変換となる．ここで考えたことの結論は，「共形変換での不変性をもつ 2 次元場の理論は，ストレステンソルの性質 (1.135) により特徴づけられる」ということである．

さて，変換

$$x_\mu \to x_\mu + \delta x_\mu, \qquad \delta x_\mu = \xi_\mu(x) \tag{1.136}$$

の下で，場 $\varphi(x)$ が

$$\varphi(x) \to \varphi(x) + \delta\varphi(x) \tag{1.137}$$

と変換するとしよう．座標変換に対して，(汎関数) 積分は不変であると期待されるので

$$0 = \int \delta\left(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)e^{-S}\right), \tag{1.138}$$

すなわち，

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_i)\cdots\varphi(x_n)\right\rangle = \left\langle\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\int d^2x \sum_{\mu,\nu=1}^{2} T_{\mu\nu}\partial_\mu\xi_\nu\right\rangle \tag{1.139}$$

という関係が期待される．これは，理論の対称性を相関関数の言葉で表現する基本的なものである．この種の関係式を **Ward 恒等式** (Ward–高橋恒等式) とよぶ．

以上の Ward 恒等式の「導出」は，もちろん論理的なものではない．我々は後に，より厳密な方法により相関関数を定義し，(1.139) のような関係 式を満たす作用素 T を構成する．以上の議論は，そのような T をストレステンソルとよぶ由来を説明したものである．

今後は，もっぱら複素座標 $z, \overline{z}$ で議論するので，Ward 恒等式 (1.139) も複素座標で書き換えておこう．式 (1.139) の右辺の最後に挿入された積分 δS (式 (1.131)) は，保存則 (1.132) を用いて

$$\delta S = \sum_{\mu,\nu=1}^{2}\int_D d^2x T_{\mu\nu}\partial_\mu\xi_\nu = \sum_{\mu,\nu=1}^{2}\oint_{\partial D} dx_\mu T_{\mu\nu}\xi_\nu \tag{1.140}$$

のように境界積分に書き換えられる．これは，(1.133) の $T, \overline{T}$ で書けば

$$\delta S = \oint_{\partial D} T(z)\xi(z)\,dz + \oint_{\partial D} \overline{T}(\overline{z})\overline{\xi}(\overline{z})\,d\overline{z} \tag{1.141}$$

となる．この各項は，共形変換

$$z \to z + \xi(z), \qquad \overline{z} \to \overline{z} + \overline{\xi}(\overline{z}) \tag{1.142}$$

の正則部分および反正則部分を生成する作用素となる．場 $\varphi(z)$ が正則座標 z にのみ依存し，共形変換 $z \to z + \xi(z)$ の下で

$$\varphi(z) \to \varphi(z) + \delta\varphi(z) \tag{1.143}$$

と変換する場合には，Ward 恒等式は次のようになる．

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \varphi(z_1) \cdots \delta\varphi(z_i) \cdots \varphi(z_n) \right\rangle = \left\langle \varphi(z_1) \cdots \varphi(z_n) \oint_{\partial D} T(z)\xi(z) \frac{dz}{2\pi i} \right\rangle. \tag{1.144}$$

ただし，後の都合上 $T(z)$ の規格化を $\dfrac{1}{2\pi i}$ 倍だけ修正した．次章以下では，この関係式を満たすようにストレステンソル $T(z)$ が定義される．

2章

自由場

本章では，共形場理論のもっとも基本的な例である自由 boson 場と自由 fermion 場を扱う．作用素積展開 (OPE) と交換関係の対応を用いて Virasoro 代数の作用を与える．また，自由 boson 場の頂点作用素，boson-fermion 対応について説明する．自由場は，次章以降も基本的な道具として頻繁に用いる．

2.1 自由 boson

自由 boson 場 $\varphi(z)$ を，形式的な和として次で導入する．

$$\varphi(z) = q + a_0 \log(z) - \sum_{n\neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n} \tag{2.1}$$

ここで q, a_n $(n \in \mathbf{Z})$ は次の交換関係に従う作用素とする．

$$[a_m, q] = \delta_{m,0}, \qquad [a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0} \tag{2.2}$$

この交換関係は，無限個の変数 $t = (t_0, t_1, \ldots)$ の微分作用素によって

$$q = t_0, \quad a_{-n} = nt_n \quad (n > 0), \quad a_n = \frac{\partial}{\partial t_n} \quad (n \geq 0) \tag{2.3}$$

としても実現できる．これらの作用素は，すでに (1.49) でも扱っている．

a_n, q からなる作用素 $\mathcal{O}$ の**真空期待値**を

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle 0 | \mathcal{O} | 0 \rangle \tag{2.4}$$

で定義する．ここで，$\langle 0 |$, $| 0 \rangle$ は

$$a_n | 0 \rangle = 0 \quad (n \geq 0), \quad \langle 0 | q = \langle 0 | a_n = 0 \quad (n < 0), \quad \langle 0 | 1 | 0 \rangle = 1 \tag{2.5}$$

を満たすとする．微分作用素による実現 (2.3) では，$| 0 \rangle$ は $t = (t_0, t_1, \ldots)$ の定数関数 1，また，$\langle 0 |$ は，任意の関数 $\psi(t)$ に対して $\psi(0)$ を対応させる汎関

数である．なお，実現 (2.3) によると話が具体的になるが，自由 boson 代数に関するすべての結果はこのような表示によらず，関係式 (2.2), (2.5) のみから導かれることに注意しよう．

後にみるように，自由 boson 場 $\varphi(z)$ 自身は log の多価性があって注意を要するので，まずはその微分から考察しよう．自由 boson 場の微分によって**カレント** $J(z)$ を

$$J(z) = \varphi'(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^{-n-1} \tag{2.6}$$

で定義する．計算の便宜上 $J(z)$ を消滅作用素の部分 $J_+(z)$ と生成作用素の部分 $J_-(z)$ の 2 つに分ける．

$$J_+(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{-n-1}, \qquad J_-(z) = \sum_{n<0} a_n z^{-n-1}. \tag{2.7}$$

このとき，a_m $(m \geq 0)$ たちは可換 (a_n $(n < 0)$ についても同様) なので，

$$[J_+(z), J_+(w)] = 0, \qquad [J_-(z), J_-(w)] = 0 \tag{2.8}$$

が成り立つ．さらに

$$[J_+(z), J_-(w)] = \frac{1}{(z-w)^2}, \tag{2.9}$$

したがって

$$J(z)J(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + :J(z)J(w): \tag{2.10}$$

を得る．これは，等比級数の和の公式 (の微分)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \tag{2.11}$$

による．なお，この計算では収束条件 $|z| < 1$ を考慮すべきであるが，いまの場合，結果が全複素平面へ一意的に拡張 (**解析接続**) できるので，そのような場合には，以下，収束領域についていちいち気にしないことにする．

以上の準備の下で，カレント $J(z)$ の真空期待値

$$\Psi = \left\langle 0 \,\middle|\, J(z)J(z_1)\cdots J(z_n) \,\middle|\, 0 \right\rangle$$

を計算しよう．$\left\langle 0 \,\middle|\, J_-(z) = 0\right.$，および $\left. J_+(z) \,\middle|\, 0 \right\rangle = 0$ に注意して

$$\begin{aligned}
\Psi &= \left\langle 0 \,\middle|\, J(z)J(z_1)\cdots J(z_n) \,\middle|\, 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \,\middle|\, J_+(z)J(z_1)\cdots J(z_n) \,\middle|\, 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \,\middle|\, [J_+(z), J(z_1)\cdots J(z_n)] \,\middle|\, 0 \right\rangle
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\langle 0 \,\middle|\, J(z_1) \cdots [J_+(z), J(z_k)] \cdots J(z_n) \,\middle|\, 0 \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\langle 0 \,\middle|\, J(z_1) \cdots \frac{1}{(z-z_k)^2} \cdots J(z_n) \,\middle|\, 0 \right\rangle \qquad ((2.8), (2.9) \text{ を用いた})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-z_k)^2} \left\langle 0 \,\middle|\, J(z_1) \cdots \widehat{J(z_k)} \cdots J(z_n) \,\middle|\, 0 \right\rangle \tag{2.12}$$

を得る．ここに $\hat{}$ は，その因子を除くことを意味する．以下においては，$\left\langle 0 \,\middle|\, J(z_1) \cdots J(z_n) \,\middle|\, 0 \right\rangle$ を簡単に $\left\langle J(z_1) \cdots J(z_n) \right\rangle$ と書いて，カレント $J(z)$ の n 点**相関関数**とよぶ．これについて，次の漸化式が得られたことになる．

$$\left\langle J(z) J(z_1) \cdots J(z_n) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-z_k)^2} \left\langle J(z_1) \cdots \widehat{J(z_k)} \cdots J(z_n) \right\rangle \tag{2.13}$$

この漸化式を用いて具体的にいくつか計算してみると

$$\begin{aligned} \left\langle J(z_1) J(z_2) \right\rangle &= \frac{1}{z_{12}^2}, \\ \left\langle J(z_1) J(z_2) J(z_3) J(z_4) \right\rangle &= \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \frac{1}{z_{13}^2 z_{24}^2} + \frac{1}{z_{14}^2 z_{23}^2}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

ただし $z_{ij} = z_i - z_j$ となる．一般に $2n$ 点相関関数は，Haffnian (1.124) を用いて，

$$\left\langle J(z_1) \cdots J(z_{2n}) \right\rangle = \mathrm{Hf}\left(\frac{1}{z_{ij}^2} \right)_{1 \le i,j \le 2n} \tag{2.15}$$

となる．一方，

$$\left\langle J(z) \right\rangle = \left\langle 0 \,\middle|\, (J_-(z) + J_+(z)) \,\middle|\, 0 \right\rangle = 0$$

より，奇数個のカレントの相関関数は 0 である．

式 (2.8), (2.9) から，形式的計算で

$$\begin{aligned} [J(z), J(w)] &= [J_+(z) + J_-(z), J(w)] \\ &= [J_+(z), J(w)] - [J(w), J_-(z)] = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

を得るが，この解釈には注意を要する．実際，$[J_+(z), J(w)]$ と $[J(w), J_-(z)]$ は収束領域が異なるので，上記の計算は，

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} z^n = \sum_{n \ge 0} z^n + \sum_{n < 0} z^n = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = 0 \tag{2.17}$$

としたことになる[1]．上記の (2.16) における最後の等号 "$=0$" は，以下の意味に解釈する．カレント $J(z)$ の n 点相関関数は，定義によれば

$$\left\langle J(z_1)\cdots J(z_n)\right\rangle = \sum_{m_1,\ldots,m_n} \left\langle 0 \,\middle|\, a_{m_1}\cdots a_{m_n} \,\middle|\, 0\right\rangle z_1^{-m_1-1}\cdots z_n^{-m_n-1} \tag{2.18}$$

という無限和である．この和は，領域

$$|z_1| > |z_2| > \cdots > |z_n| \tag{2.19}$$

で絶対収束し，結果は全空間 $\mathbf{C}^n$ に一意的に解析接続されて，一つの有理関数を定める．その結果は漸化式 (2.13) によって求められる．カレント $J(z_i)$ の積の順序を交換した相関関数は異なる領域で収束するが，これも解析接続により同じ有理関数を定める．この意味で $J(z)$ と $J(w)$ の積は可換であり，形式的計算の結果 (2.16) も，この意味に理解される．

2.2 OPE

前節の計算から，積 $J(z)J(w)$ を含む偶数個のカレントの相関関数は $z=w$ に 2 位の極をもち，その係数は $J(z)J(w)$ を 1 に置き換えた相関関数に等しい．すなわち，

$$\left\langle \cdots J(z)J(w)\cdots \right\rangle = \frac{1}{(z-w)^2}\left\langle \cdots 1 \cdots \right\rangle + \cdots \tag{2.20}$$

である (奇数個の相関関数でも $0=0$ で正しい)．このことを簡潔に表現して

$$J(z)J(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + \cdots \tag{2.21}$$

と書く．これはカレント $J(z)$ を特徴づける重要な式であり，$J(z)$ と $J(w)$ の**作用素積展開** (または，Operator Product Expansion を略して **OPE**) とよぶ．

「特徴づける」とは，カレント $J(z)$ の相関関数が，この OPE (2.20) と可換性

$$\left\langle \cdots J(z)J(w)\cdots \right\rangle = \left\langle \cdots J(w)J(z)\cdots \right\rangle, \tag{2.22}$$

および規格化条件 $\langle 1\rangle = 1$ によって一意に定まっている，という意味である．これを示すには，OPE (2.20) から自由 boson の交換関係

1) 式 (2.17) の左辺の和は δ 関数として意味をもたせることも可能である．

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0} \tag{2.23}$$

を読みとり，その代数から相関関数が再構成されることをいえばよい．核心は，OPE から代数を読みとる部分である．すなわち，いままでは交換関係 (2.2) と展開式 (2.6) から OPE (2.21) を得たが，その逆を示すのである．

$J(z)$ から a_n を再現するためには，展開式 (2.6) の逆変換

$$a_n = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} z^n J(z) \tag{2.24}$$

を用いる．$J(z)$ が普通の関数であれば，(2.6), (2.24) は Laurent 展開の公式そのものである．しかし，考えている $J(z)$ は作用素に値をもつ関数であり，極の位置が他の作用素に依存して決まるため，(2.24) の積分路 C の取り方には特別な注意を要する．例えば，形式的な式

$$\begin{aligned} &J(x_1)\cdots J(x_k)a_n J(w_1)\cdots J(w_l) \\ &\quad = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} z^n J(x_1)\cdots J(x_k)J(z)J(w_1)\cdots J(w_l) \end{aligned} \tag{2.25}$$

では，被積分関数は $z = x_1, \ldots, x_k, w_1, \ldots, w_l$ に極をもつので，それらの極の避け方を指定する必要がある．そこで積分路 C としては，「積分される作用素 $J(z)$ より右側にある作用素より生ずる極 (いまの場合は $w_1, \ldots, w_l$) および原点のみを内側に含むようにとる」と約束する．このような積分路の指定により，カレント $J(z)$ から展開係数 a_n を定義すれば，これは，交換関係 (2.23) と整合的である．実際，

$$\begin{aligned} [a_n, J(w)] &= a_n J(w) - J(w) a_n \\ &= \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} z^n J(z)J(w) - J(w)\oint_{C_2} \frac{dz}{2\pi i} z^n J(z) \end{aligned} \tag{2.26}$$

において，$J(z)J(w) = J(w)J(z)$ であるから

$$[a_n, J(w)] = \left(\oint_{C_1} - \oint_{C_2}\right) \frac{dz}{2\pi i} z^n J(z)J(w) \tag{2.27}$$

となるが，C_1 は C_2 に比べて $z = w$ の極を余分に含むので

$$\begin{aligned} [a_n, J(w)] &= \oint_w \frac{dz}{2\pi i} z^n J(z)J(w) \\ &= \oint_w \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^n}{(z-w)^2} \\ &= n w^{n-1} \end{aligned} \tag{2.28}$$

を得る．これは (2.23) と等価である (両辺の w の係数を比較).

以下で，いろいろな代数を考察するが，いずれの場合にも OPE による記述と展開係数による記述が可能である．どちらが基本的ということではなく，状況に応じて使い分けることにより種々の計算が簡単になる．

2.3 Virasoro 代数

共形場理論の基礎となるのは共形不変性であり，これは **Virasoro 代数**の作用のもとでの理論の不変性 (共変性) を意味する．この代数は弦理論の初期に Virasoro (ビラソロ) が発見した．自由 boson の理論にも Virasoro 代数の作用が定義され共形不変性をもつ．具体的には

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}} : a_m a_{n-m} : \tag{2.29}$$

で定義される作用素 L_n が，Virasoro 代数

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \tag{2.30}$$

を生成する．なお，(2.29) の右辺の記号 : : は正規積であって．いまの場合

$$: a_m a_n := a_m a_n \quad (m \leq n), \qquad : a_m a_n := a_n a_m \quad (m > n) \tag{2.31}$$

である．(2.30) は (2.29), (2.31) の定義だけから直接計算により示すこともできるが，ここでは，カレントと Wick の定理を用いた，より簡単な方法で示すことにしよう．まず，L_n の母関数としてストレステンソル $T(z)$ を

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n z^{-n-2} \tag{2.32}$$

と定義する．カレントの定義を考慮すると

$$T(z) = \frac{1}{2} : J(z) J(z) : \tag{2.33}$$

と簡単に表すことができる．ここで，積 $T(z)T(w)$ の $z=w$ での OPE 展開を計算しよう．Wick の定理

$$\begin{aligned} : AB :: CD : &= \Big[c(A,C)c(B,D) + c(A,D)c(B,C) \Big] \\ &+ \Big[c(A,C) : BD : + c(A,D) : BC : + c(B,C) : AD : + c(B,D) : AC : \Big] \\ &+ : ABCD : \end{aligned} \tag{2.34}$$

を適用し，縮約 $c(J(z), J(w)) = \dfrac{1}{(z-w)^2}$ を用いれば，

$$\begin{aligned}
&:J(z)J(z)::J(w)J(w): \\
&= \frac{2}{(z-w)^4} + \frac{4}{(z-w)^2} :J(z)J(w): + :J(z)J(z)J(w)J(w): \\
&= \frac{2}{(z-w)^4} + \frac{4}{(z-w)^2} :J(w)J(w): + \frac{4}{z-w} :J'(w)J(w): + \cdots
\end{aligned} \tag{2.35}$$

となる (2 つ目の等式は Laurent 展開による). すなわち次の OPE が得られた.

$$T(z)T(w) = \frac{1}{2(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{(z-w)}T'(w) + \cdots \tag{2.36}$$

この OPE (2.36) が交換関係 (2.30) と等価であることは，

$$L_n = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z),$$

および前節で示した積分路の操作を使って，その中間の式

$$[L_n, T(z)] = z^n \left(z\frac{\partial}{\partial z} + 2(n+1) \right) T(z) + \frac{1}{12}(z^{n+1})'''$$

を経由することにより示される．同様に $T(z)$ と $J(w)$ の OPE も

$$T(z)J(w) = \frac{1}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{(z-w)}J'(w) + \cdots \tag{2.37}$$

と求められる．

これは交換関係で書けば

$$[L_m, a_n] = -na_{m+n} \tag{2.38}$$

となる．

補足　Virasoro 代数の表現や $T(z)$ の相関関数については章を改めて議論することにして，ここでは，twist の操作についてのみ補足しておこう．ストレステンソル $T(z)$ の定義にカレント $J(z)$ の微分を付加して

$$T_\rho(z) = \frac{1}{2} :J(z)J(z): + \rho J'(z) \tag{2.39}$$

とする．上記の OPE を組み合わせると

$$T_\rho(z)T_\rho(w) = \frac{c_\rho}{2(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T_\rho(w) + \frac{1}{(z-w)}T'_\rho(w) + \cdots, \tag{2.40}$$

ここに $c_\rho = 1 - 12\rho^2$，および

$$T_\rho(z)J(w) = \frac{-2\rho}{(z-w)^3} + \frac{1}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{(z-w)}J'(w) + \cdots \tag{2.41}$$

が得られる．後者は，交換関係で表せば

$$[L_m^{(\rho)}, a_n] = -na_{m+n} - \rho m(m+1)\delta_{m+n,0} \tag{2.42}$$

である．

2.4 頂点作用素の OPE

自由 boson 場 $\varphi(z)$ を，次のように生成部分 $\varphi_-(z)$ と消滅部分 $\varphi_+(z)$ に分解する．

$$\begin{aligned} \varphi_+(z) &= a_0 \log(z) - \sum_{n>0} \frac{a_n}{n} z^{-n}, \\ \varphi_-(z) &= q - \sum_{n<0}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^{-n}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

実現 (2.3) では，$\varphi_-(z)$ が掛け算，$\varphi_+(z)$ が微分に対応する．これより，

$$[\varphi_+(z), \varphi_-(w)] = \log(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{w}{z}\right)^n = \log(z-w), \tag{2.44}$$

および，

$$\varphi(z)\varphi(w) = \log(z-w) + :\varphi(z)\varphi(w): \tag{2.45}$$

が従う．対数分岐のため，積 $\varphi(z)\varphi(w)$ は無限多価となる．無限多価といっても $2\pi i$ の整数倍の違いなので，微分するか指数関数に乗せることにより，この多価性が緩和される．前者がいままで扱っていたカレントであり，後者が頂点作用素

$$V_\alpha(z) = :e^{\alpha\varphi(z)}: \tag{2.46}$$

である．1.4 節で扱ったのは，その微分作用素による実現であった．Wick の定理により

$$V_\alpha(z)V_\beta(w) = (z-w)^{\alpha\beta} :V_\alpha(z)V_\beta(w): \tag{2.47}$$

であるから，積 $V_\alpha(z)V_\beta(w)$ はベキの特異性を示す．(2.47) の右辺を $z = w$ で展開して，OPE

$$V_\alpha(z)V_\beta(w) = (z-w)^{\alpha\beta}V_{\alpha+\beta}(w) + (z-w)^{\alpha\beta+1}\alpha :J(w)V_{\alpha+\beta}(w): + \cdots \tag{2.48}$$

を得る．指数 $\alpha\beta$ の値によっては，より高次の展開が必要であるが，どの項もカレント $J(w)$ とその微分からなる多項式と $V_{\alpha+\beta}(w)$ との正規積の形をしている．

真空期待値については，Wick の定理 (1.46) より次が得られる．

$$\left\langle V_{\alpha_1}(z_1)\cdots V_{\alpha_N}(z_N)\right\rangle = \prod_{1\le i<j\le N}(z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j} \tag{2.49}$$

次に，頂点作用素への Virasoro 代数の作用をみておこう．$T(z)V_\alpha(w)$ の OPE を計算する．Wick の定理により

$$:AB::e^C: = c(A,C)c(B,C):e^C: + \left[c(A,C):Be^C: + c(B,C):Ae^C:\right] + :ABe^C: \tag{2.50}$$

であるから，縮約 $c(J(x),\varphi(w)) = \dfrac{1}{z-w}$ を用いて

$$T(z)V_\alpha(w) = \frac{\alpha^2/2}{(z-w)^2}V_\alpha(w) + \frac{1}{z-w}V'_\alpha(w) + \cdots \tag{2.51}$$

を得る．一般に

$$T(z)\Phi(w) = \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w) + \frac{1}{z-w}\Phi'(w) + \cdots \tag{2.52}$$

を満たす場 Φ を **primary 場**とよび，h をその**共形次元**という．交換関係の言葉で書き直すと

$$[L_n, \Phi(z)] = z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)h\right)\Phi(z) \tag{2.53}$$

を意味する．primary 場は共形場理論でもっとも基本的な対象であり，次章で詳しく考察する．自由 boson 場の頂点作用素 V_α は典型的な primary 場であって，その共形次元は $h = \alpha^2/2$ である．

補足 ストレステンソルを (2.39) のように twist した場合には

$$J(z)V_\alpha(w) = \frac{\alpha}{z-w}V_\alpha(w) + \cdots \tag{2.54}$$

を用いて

$$T_\rho(z)V_\alpha(w) = \frac{h}{(z-w)^2}V_\alpha(w) + \frac{1}{z-w}V'_\alpha(w) + \cdots, \tag{2.55}$$

ただし $h = \alpha(\alpha - 2\rho)/2$, となる．

最後に，boson の代数 a_n, q の表現空間の自然な表現空間である boson Fock 空間について述べておこう．

boson の真空状態 $|0\rangle$ に $e^{\alpha q}$ を作用させた状態を

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha q}|0\rangle \tag{2.56}$$

と表す[2]．交換関係から

$$\begin{aligned} &a_0|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad e^{\beta q}|\alpha\rangle = |\alpha+\beta\rangle, \\ &a_n|\alpha\rangle = 0 \quad (n>0) \end{aligned} \tag{2.57}$$

が成り立つ．これより，

$$L_0|\alpha\rangle = \frac{\alpha^2}{2}|\alpha\rangle, \qquad L_n|\alpha\rangle = 0 \quad (n>0) \tag{2.58}$$

を得る．この $|\alpha\rangle$ を電荷 α の**荷電真空**という．$|\alpha\rangle$ に a_n $(n<0)$ を作用させて得られるベクトル全体を電荷 α の **boson Fock 空間**といい H_α と表す．H_α は無限次元ベクトル空間であるが，L_0 の固有値が $\alpha^2/2+n$ となる有限次元の固有空間 $H_\alpha(n)$ に分解される．

交換関係 (2.38) より，$[L_0, a_{-n}] = na_{-n}$ なので，a_{-n} は L_0 の固有値を n だけ上げる作用をする．このことに注意して，小さな n について $H_\alpha(n)$ の基底を書いてみると

$$\left|\begin{array}{c|c} 0 & |\alpha\rangle \\ 1 & a_{-1}|\alpha\rangle \\ 2 & a_{-2}|\alpha\rangle,\ a_{-1}^2|\alpha\rangle \\ 3 & a_{-3}|\alpha\rangle,\ a_{-2}a_{-1}|\alpha\rangle,\ a_{-1}^3|\alpha\rangle \end{array}\right| \tag{2.59}$$

となる．一般に $H_\alpha(n)$ は

$$a_{-m}^{\nu_m}\cdots a_{-2}^{\nu_2}a_{-1}^{\nu_1}|\alpha\rangle, \qquad \sum_{i=1}^m i\nu_i = n \qquad (\nu_i \geq 0) \tag{2.60}$$

が基底をなし，$\dim H_\alpha(n) = p(n)$ である．ここで $p(n)$ は n の**分割数**であり，その母関数は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty p(n)q^n &= \prod_{n=1}^\infty (1-q^n)^{-1} \\ &= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + \cdots \end{aligned} \tag{2.61}$$

で与えられる．

2) fermion の荷電真空 (1.90) と同じ記号であるが，とりあえず別物．後述の boson-fermion 対応で同一視できるので混同しても問題はない．

微分作用素による実現 (2.3) でいえば，H_α は $t_1, t_2, \ldots$ の多項式に $e^{\alpha t_0}$ をかけたものの全体

$$H_\alpha = e^{\alpha t_0}\mathbf{C}[t_1, t_2, \ldots] \tag{2.62}$$

であり，そのうち，t_i の次数を i と数えて次数 n の同次成分を集めたものが $H_\alpha(n)$ である．

注意 定義に忠実にいえば a_n $(n<0)$ を有限個作用させたものの有限個の線形結合のみを考えるのが Fock 空間であるが，場の作用素に意味をもたせるため，適当な意味で完備化して無限和も許しておく必要がある．完備化の方法としては，次のような位相によるものが OPE の方法とも相性がよい．すなわち，場の作用素 $J(z)$, $T(z)$ などの作用に関して，

- Laurent 級数 $\mathbf{C}((z))$ としては z のベキの高いものほど 0 に近い．
- H_α の元としては L_0 固有値の大きいものほど 0 に近い．

という位相で収束が保証され，形式的計算が正当化できる．また，頂点作用素 $V_\beta(z)$ も $H_\alpha \to H_{\alpha+\beta}\otimes\mathbf{C}((z))$ なる作用素として意味をもつ．

2.5 自由 fermion

反可換な場 $\psi(z)$ を次のように定める．

$$\psi(z) = \sum_{\mu\in\mathbf{Z}+1/2} \psi_\mu z^{-\mu-1/2} \tag{2.63}$$

ここに展開係数 ψ_μ は，次の反交換関係に従うとする．

$$[\psi_\mu, \psi_\nu]_+ = \delta_{\mu+\nu,0} \tag{2.64}$$

この $\psi(z)$ を**自由 fermion 場**という．いま，$\psi(z)$ の生成部分 $\psi_-(z)$，消滅部分 $\psi_+(z)$ を

$$\psi_+(z) = \sum_{\mu>0} \psi_\mu z^{-\mu-1/2}, \qquad \psi_-(z) = \sum_{\mu<0} \psi_\mu z^{-\mu-1/2} \tag{2.65}$$

と定めると，縮約は $c(\psi(z),\psi(w)) = \dfrac{1}{z-w}$ となり，

$$\psi(z)\psi(w) = \frac{1}{z-w} + :\psi(z)\psi(w): \tag{2.66}$$

が得られる．また，bra および ket の真空ベクトル $\langle 0|$, $|0\rangle$ を次で定義する．

$$\psi_\mu|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_{-\mu} = 0 \quad (\mu>0), \quad \langle 0|0\rangle = 1. \tag{2.67}$$

ここで，$\langle 0|$, $|0\rangle$ ではさんだ真空期待値

$$\langle\psi(z_1)\cdots\psi(z_n)\rangle = \langle 0|\psi(z_1)\cdots\psi(z_n)|0\rangle \tag{2.68}$$

を計算しよう．$\psi(z_1) = \psi_+(z_1) + \psi_-(z_1)$ と分け，交換関係

$$\psi_+(z)\psi(w) = \frac{1}{z-w} - \psi(w)\psi_+(z) \tag{2.69}$$

を用いて $\psi_+(z_1)$ を右に移動させると，漸化式

$$\langle\psi(z_1)\cdots\psi(z_n)\rangle = \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i}{z_1 - z_i}\langle\psi(z_2)\cdots\widehat{\psi(z_i)}\cdots\psi(z_n)\rangle \tag{2.70}$$

を得る．ここに ^ はその因子を除くことを表す．これより，n が奇数のときは

$$\langle\psi(z_1)\cdots\psi(z_n)\rangle = 0, \tag{2.71}$$

偶数のときは

$$\begin{aligned}
\langle\psi(z_1)\psi(z_2)\rangle &= \frac{1}{z_1-z_2}, \\
\langle\psi(z_1)\cdots\psi(z_4)\rangle &= \frac{1}{z_1-z_2}\frac{1}{z_3-z_4} - \frac{1}{z_1-z_3}\frac{1}{z_2-z_4} + \frac{1}{z_1-z_4}\frac{1}{z_2-z_3}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

など，一般に，Wick の定理によって，

$$\langle\psi(z_1)\cdots\psi(z_{2n})\rangle = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right)_{1\le i,j\le 2n} \tag{2.73}$$

が得られる．ただし $\mathrm{Pf}(A)$ は $2n$ 次反対称行列 (A_{ij}) の **Pfaffian**

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{n!\,2^n}\sum_{\sigma\in S_{2n}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)} \tag{2.74}$$

を表す．反対称行列 A の Pfaffian と行列式の間には

$$\det A = \left(\mathrm{Pf}(A)\right)^2 \tag{2.75}$$

の関係がある．この証明は Grassmann 数を用いれば簡単である．

証明． $2n$ 個の Grassmann 数 ψ_i, χ_i $(1 \le i \le n)$ を用意する．$b_i = \psi_i - \chi_i$, $c_i = (\psi_i + \chi_i)/2$ とおけば，(2.75) の左辺および右辺は，それぞれ

$$\exp\Bigl(\sum_{i,j} b_i A_{ij} c_j\Bigr) = \exp\Bigl(\sum_{i<j}\psi_i A_{ij}\psi_j + \sum_{i<j}\chi_j A_{ij}\chi_i\Bigr) \tag{2.76}$$

の展開における $b_1c_1\cdots b_nc_n = \psi_1\cdots\psi_n\chi_n\cdots\chi_1$ の係数である． □

自由 fermion 場 $\psi(z)$ から，ストレステンソル $T(z)$ を

$$T(z) = \frac{1}{2} : \psi'(z)\psi(z) : \tag{2.77}$$

により定義する．Wick の定理より

$$T(z)\psi(w) = \frac{1/2}{(z-w)^2}\psi(w) + \frac{1}{z-w}\psi'(w) + \cdots, \tag{2.78}$$

および

$$T(z)T(w) = \frac{1/4}{(z-w)^4} + \frac{1}{z-w}T(w) + \frac{2}{z-w}T'(w) + \cdots \tag{2.79}$$

を得る．すなわち $T(z)$ は $c = 1/2$ の Virasoro 代数をなし，$\psi(z)$ はその下で $h = 1/2$ の primary 場として振る舞う．OPE (2.78) は，交換関係で表すと

$$[L_n, \psi_\mu] = \left(\frac{n}{2} - \mu\right)\psi_{\mu+n} \tag{2.80}$$

である．$\psi_{-\mu}$ は L_0 固有値を μ だけ上げる作用をする．真空ベクトル $|0\rangle$ に ψ_μ $(\mu < 0)$ を作用させて得られるベクトルの全体 F^{NS} を考える．F^{NS} を $L_0 = n$ となる固有空間 F_n^{NS} $(n \in \frac{1}{2}\mathbf{Z})$ に分解すると

0	$\lvert 0\rangle$	$\frac{1}{2}$	$\psi_{-\frac{1}{2}}\lvert 0\rangle$
1	—	$\frac{3}{2}$	$\psi_{-\frac{3}{2}}\lvert 0\rangle$
2	$\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}\lvert 0\rangle$	$\frac{5}{2}$	$\psi_{-\frac{5}{2}}\lvert 0\rangle$
3	$\psi_{-\frac{5}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}\lvert 0\rangle$	$\frac{7}{2}$	$\psi_{-\frac{7}{2}}\lvert 0\rangle$
4	$\psi_{-\frac{7}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}\lvert 0\rangle$, $\psi_{-\frac{5}{2}}\psi_{-\frac{3}{2}}\lvert 0\rangle$	$\frac{9}{2}$	$\psi_{-\frac{9}{2}}\lvert 0\rangle$, $\psi_{-\frac{5}{2}}\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}\lvert 0\rangle$

(2.81)

などが基底となり，その次元は，母関数

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}/2} \dim(F_n^{\mathrm{NS}})q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + q^{n-1/2}) \tag{2.82}$$

で与えられる．F^{NS} を (NS 表現の) **fermion Fock 空間**とよぶ．

自由 fermion の定義 (2.63), (2.64) で添字 μ を半整数にとったのは，場 $\psi(z)$ が $z = 0$ のまわりを一回転したときに一価であるようにするためである．このような fermion を **NS (Neveu-Schwarz)** fermion とよぶ．F^{NS} の NS は，この意味である．これに対して添字 μ を整数とすると

$$\psi(z) \to \psi(e^{2\pi i}z) = -\psi(z) \tag{2.83}$$

のように，原点回りで $\sqrt{z}$ のように分岐する二価の fermion を得る．これを **Ramond** fermion という．以下，Ramond fermion について考えよう．

式 (2.63), (2.64) は添字 μ, ν が整数という以外はすべて NS の場合と同じである．Ramond fermion のゼロモード ψ_0 は反交換関係より $\psi_0^2 = 1/2$ を満たす．ここで，

$$\psi_+(z) = \sum_{n\geq 0} \psi_n z^{-n-1/2}, \qquad \psi_-(z) = \sum_{n<0} \psi_n z^{-n-1/2} \tag{2.84}$$

とおくと，反交換関係

$$[\psi_+(z), \psi(w)]_+ = \sqrt{\frac{z}{w}}\frac{1}{z-w}, \qquad [\psi_-(z), \psi(w)]_+ = \sqrt{\frac{z}{w}}\frac{1}{w-z} \tag{2.85}$$

が得られる．したがって $\psi(z), \psi(w)$ は反可換である．なお，ゼロモード ψ_0 を $\psi_+(z)$ に含めたが，$\psi_-(z)$ に含めるようにしても議論の本質は変わらない．

Ramond fermion に対する bra および ket の真空ベクトル $\langle \sigma \,|$, $|\, \sigma \rangle$ を次で定義する．

$$\psi_n \,|\, \sigma \rangle = 0, \quad \langle \sigma \,|\, \psi_{-n} = 0 \quad (n > 0). \tag{2.86}$$

ただしゼロモード ψ_0 は, $\langle \sigma \,|$, $|\, \sigma \rangle$ のいずれにおいても消滅しないことに注意しよう．$\psi_0 \,|\, \sigma \rangle = \,|\, \mu \rangle$ とおけば $\psi_0 \,|\, \mu \rangle = \frac{1}{2} \,|\, \sigma \rangle$ であり，$|\, \mu \rangle$ も $\psi_n \,|\, \mu \rangle = 0$ $(n > 0)$ を満たす．すなわち，Ramond fermion の真空は 2 次元空間をなす．同様のことは，bra ベクトルについても成り立つ．bra および ket ベクトルのペアリングは，真空ベクトルの一つ $\langle \sigma \,|$ および $|\, \sigma \rangle$ を選んで

$$\langle \sigma | \sigma \rangle = 1 \tag{2.87}$$

と規格化する．これより $\langle \mu | \mu \rangle = \frac{1}{2}$ となるが，

$$\langle \sigma | \mu \rangle = \langle \sigma \,|\, \psi_0 \,|\, \sigma \rangle = \langle \mu | \sigma \rangle$$

は任意である (これを 0 とすることも多い).

(2.86), (2.87) で定めた真空ベクトル $\langle \sigma \,|$, $|\, \sigma \rangle$ に対して，それらではさまれた Ramond fermion の相関関数 $\langle \sigma \,|\, \psi(z_1) \cdots \psi(z_n) \,|\, \sigma \rangle$ を計算しよう．

$$\begin{aligned} &\langle \sigma \,|\, \psi(z) = \langle \sigma \,|\, \psi_+(z), \quad \psi_+(z) \,|\, \sigma \rangle = \psi_0 \,|\, \sigma \rangle \frac{1}{\sqrt{z}}, \\ &\psi_+(z)\psi(w) = \sqrt{\frac{z}{w}}\frac{1}{z-w} - \psi(w)\psi_+(z) \end{aligned} \tag{2.88}$$

に注意して，

$$
\begin{aligned}
\langle \sigma | \psi(z_1)\cdots\psi(z_n) | \sigma \rangle &= \langle \sigma | \psi_+(z_1)\psi(z_2)\cdots\psi(z_n) | \sigma \rangle \\
&= \sum_{i=2}^{n} \sqrt{\frac{z_1}{z_i}} \frac{(-1)^i}{z_1 - z_i} \langle \sigma | \psi(z_2)\cdots\widehat{\psi(z_i)}\cdots\psi(z_n) | \sigma \rangle \\
&\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{z_1}} \langle \sigma | \psi(z_2)\cdots\psi(z_n)\psi_0 | \sigma \rangle
\end{aligned}
\tag{2.89}
$$

を得る．この式で，$|\sigma\rangle$ を $|\mu\rangle$ に，かつ/または $\langle\sigma|$ を $\langle\mu|$ に置き換えた式も成り立ち，それらを合わせて閉じた漸化式を与える．簡単な場合は

$$
\begin{aligned}
\langle \sigma | \psi(z) | \sigma \rangle &= \frac{\langle \sigma | \psi_0 | \sigma \rangle}{\sqrt{z}}, \\
\langle \sigma | \psi(z)\psi(w) | \sigma \rangle &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{z}{w}} + \sqrt{\frac{w}{z}}\right)\frac{1}{z-w}
\end{aligned}
\tag{2.90}
$$

となる．一般に，$2n+1$ 点関数は，

$$
\begin{aligned}
&\langle \sigma | \psi(z_1)\cdots\psi(z_{2n+1}) | \sigma \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} \langle \sigma | \psi(z_i) | \sigma \rangle \langle \sigma | \psi(z_1)\cdots\widehat{\psi(z_i)}\cdots\psi(z_{2n+1}) | \sigma \rangle
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

であり，また $2n$ 点関数は，(2.73) と同様に 2 点関数 $\langle \sigma | \psi(z)\psi(w) | \sigma \rangle$ の Pfaffian として与えられることが確かめられる．

補足　証明は，$\mathcal{O}$ をいくつかの ψ の積として，$\langle \mu | \mathcal{O} | \mu \rangle = \frac{1}{2}\langle \sigma | \mathcal{O} | \sigma \rangle$ および，

$$
\begin{aligned}
\langle \mu | \mathcal{O} | \sigma \rangle &= \langle \sigma | \mathcal{O} | \mu \rangle \\
&= \langle \sigma | \mathcal{O} | \sigma \rangle \times \begin{cases} \langle \sigma | \psi_0 | \sigma \rangle & (\mathcal{O}\ \text{が偶数個の積}), \\ \dfrac{1}{2\langle \sigma | \psi_0 | \sigma \rangle} & (\mathcal{O}\ \text{が奇数個の積}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

を用いる．

Ramond fermion の相関関数は $z_i = z_j$ に一位の極をもち，$z = 0, \infty$ で二価に分岐するほかは正則である．したがって $z = 0, \infty$ 以外の点での場 $\psi(z)$ の Laurent 展開は整数ベキ (すなわち NS fermion) として扱う必要がある．このように，一つの fermion 場が，展開する場所によって Ramond fermion になったり NS fermion になったりすることは，一つの関数が展開される場所に応じ

て異なる指数の展開 (分岐性) を示すことと同じで，別に奇妙なことではない．そこで NS fermion も Ramond fermion も同じ OPE

$$\psi(z)\psi(w) = \frac{1}{z-w} + \cdots \tag{2.92}$$

に従う一つの fermion 場 $\psi(z)$ であって，その Laurent 展開に NS と Ramond の二種類あると理解する．この立場では，相関関数 $\langle \sigma \,|\, \psi(z_1)\cdots\psi(z_n) \,|\, \sigma \rangle$ は，fermion 場 $\psi(z)$ に二価の分岐を与える場 $\sigma(z)$ が，$z=0$ および $z=\infty$ に挿入された $n+2$ 点関数

$$\langle \sigma \,|\, \psi(z_1)\cdots\psi(z_n) \,|\, \sigma \rangle = \langle 0 \,|\, \sigma(\infty)\psi(z_1)\cdots\psi(z_n)\sigma(0) \,|\, 0 \rangle \tag{2.93}$$

と解釈される．なお，場 $\sigma(z)$ の詳しい性質は次章で議論する．

同様の事情により，ストレステンソルの定義も NS, Ramond の区別なく，

$$T(z) = \frac{1}{2}\lim_{w\to z}\left(\psi'(z)\psi(w) + \frac{1}{(z-w)^2}\right) \tag{2.94}$$

が適用でき，OPE (2.78), (2.79) が成り立つ．ここでは，OPE (2.92) を満たす場 $\psi(z)$ やその相関関数の定義がはっきりするようにモードの反交換関係とその表現からはじめたが，モードの (反) 交換関係よりも OPE の方がより本質を反映しているといえる．

最後に Ramond fermion の Fock 空間を調べておこう．ベクトル $|\sigma\rangle$ に Ramond fermion ψ_n を作用させて得られる空間 F^R を L_0 固有値で分解すると

$$\left|\begin{array}{c|cc} 0 & |\sigma\rangle & \psi_0|\sigma\rangle \\ 1 & \psi_{-1}|\sigma\rangle & \psi_{-1}\psi_0|\sigma\rangle \\ 2 & \psi_{-2}|\sigma\rangle & \psi_{-2}\psi_0|\sigma\rangle \\ 3 & \psi_{-3}|\sigma\rangle,\ \psi_{-2}\psi_{-1}|\sigma\rangle & \psi_{-3}\psi_0|\sigma\rangle,\ \psi_{-2}\psi_{-1}\psi_0|\sigma\rangle \end{array}\right| \tag{2.95}$$

となる．これらの空間の次元の母関数は

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \dim(F^R_n)q^n = 2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) \tag{2.96}$$

で与えられる．ここで係数 $2=(1+q^0)$ は ψ_0 の作用による重複を表す．

2.6 荷電 fermion と bc 系

2 成分の fermion 場 $\overline{\psi}(z)$, $\psi(z)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(z) &= \sum_{\mu\in\mathbf{Z}+1/2} \overline{\psi}_\mu z^{-\mu-1/2},\\ \psi(z) &= \sum_{\mu\in\mathbf{Z}+1/2} \psi_\mu z^{-\mu-1/2}.\end{aligned} \tag{2.97}$$

ここに展開係数 $\overline{\psi}_\mu$, ψ_μ は次の反交換関係に従うとする.

$$\begin{aligned}&[\overline{\psi}_\mu, \overline{\psi}_\nu]_+ = [\psi_\mu, \psi_\nu]_+ = 0,\\ &[\overline{\psi}_\mu, \psi_\nu]_+ = \delta_{\mu+\nu,0}\,.\end{aligned} \tag{2.98}$$

このとき, $\overline{\psi}(z)$ の生成部分 $\overline{\psi}_-(z)$, 消滅部分 $\overline{\psi}_+(z)$ を

$$\begin{aligned}\overline{\psi}_+(z) &= \sum_{\mu>0} \overline{\psi}_\mu z^{-\mu-1/2},\\ \overline{\psi}_-(z) &= \sum_{\mu<0} \overline{\psi}_\mu z^{-\mu-1/2}\end{aligned} \tag{2.99}$$

と定め, $\psi_\pm(z)$ も同様に定義すると, 1 成分 fermion 場 $\psi(z)$ の場合と同様にして

$$\begin{aligned}&\overline{\psi}(z)\overline{\psi}(w) = :\overline{\psi}(z)\overline{\psi}(w):\,, \qquad \psi(z)\psi(w) = :\psi(z)\psi(w):\,,\\ &\overline{\psi}(z)\psi(w) = \frac{1}{z-w} + :\overline{\psi}(z)\psi(w):\end{aligned} \tag{2.100}$$

が得られる. とくに, 場 $\overline{\psi}(z)$, $\psi(z)$ はすべて反可換である.

次に, 真空ベクトル $\langle 0 |$, $| 0 \rangle$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}&\overline{\psi}_\mu | 0 \rangle = 0, \quad \psi_\mu | 0 \rangle = 0 \quad (\mu > 0),\\ &\langle 0 | \overline{\psi}_\mu = 0, \quad \langle 0 | \psi_\mu = 0 \quad (\mu < 0),\\ &\langle 0 | 0 \rangle = 1.\end{aligned} \tag{2.101}$$

$\langle 0 |$, $| 0 \rangle$ ではさんだ真空期待値について

$$\langle 0 | \overline{\psi}(z_1)\cdots\overline{\psi}(z_n)\psi(w_m)\cdots\psi(w_1) | 0 \rangle \tag{2.102}$$

を計算しよう.

$$\overline{\psi}(z_n) = \overline{\psi}_+(z_n) + \overline{\psi}_-(z_n)$$

と分けて，$\overline{\psi}_-(z_n)$ を左に $\overline{\psi}_+(z_n)$ を右に移動させると，漸化式

$$\begin{aligned}&\langle\overline{\psi}(z_1)\cdots\overline{\psi}(z_n)\psi(w_m)\cdots\psi(w_1)\rangle\\&\quad=\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{m-i}}{z_n-w_i}\langle\overline{\psi}(z_1)\cdots\overline{\psi}(z_{n-1})\psi(w_m)\cdots\widehat{\psi(w_i)}\cdots\psi(w_1)\rangle\end{aligned}\tag{2.103}$$

が得られる．$\psi(w_m)$ についても同様である．これより，$m>n$ または $m<n$ の場合は $n=0$ または $m=0$ に帰着し，0 となることがわかる．また $m=n$ の場合には

$$\langle\overline{\psi}(z_1)\cdots\overline{\psi}(z_n)\psi(w_n)\cdots\psi(w_1)\rangle=\det\left(\frac{1}{z_i-w_j}\right)_{1\le i,j\le n}\tag{2.104}$$

を得る．これは Wick の定理の帰結でもある．

荷電真空 $\langle n|$, $|n\rangle$ $(n\in\mathbf{Z})$ を次で定義する．

$$\begin{aligned}\langle n|&=\begin{cases}\langle 0|\psi_{\frac{1}{2}}\cdots\psi_{n-\frac{1}{2}} & (n>0)\\ \langle 0| & (n=0)\\ \langle 0|\overline{\psi}_{\frac{1}{2}}\cdots\overline{\psi}_{|n|-\frac{1}{2}} & (n<0)\end{cases}\\ |n\rangle&=\begin{cases}\overline{\psi}_{-n+\frac{1}{2}}\cdots\overline{\psi}_{-\frac{1}{2}}|0\rangle & (n>0)\\ |0\rangle & (n=0)\\ \psi_{-|n|+\frac{1}{2}}\cdots\psi_{-\frac{1}{2}}|0\rangle & (n<0)\end{cases}\end{aligned}\tag{2.105}$$

このとき，$\langle m|n\rangle=\delta_{m,n}$ である．

荷電真空ではさんだ相関関数は，例えば

$$\begin{aligned}\langle n|\psi(w_n)\cdots\psi(w_1)|0\rangle&=\langle 0|\overline{\psi}_{\frac{1}{2}}\cdots\overline{\psi}_{-n-\frac{1}{2}}\psi(w_n)\cdots\psi(w_1)|0\rangle\\&=\det\left(\langle 0|\overline{\psi}_{i-\frac{1}{2}}\psi(w_j)|0\rangle\right)_{1\le i,j\le n}\\&=\det\left(w_j^{i-1}\right)_{1\le i,j\le n}\end{aligned}\tag{2.106}$$

$(n<0$ の場合) などと計算できる．

以下では，荷電 fermion 系 $\psi,\overline{\psi}$ から構成されるカレント $J(z)$ とストレステンソル $T(z)$ を考察する．少し一般化した設定で扱うため，次の OPE をもつ反可換な場 b,c を考える．

$$
\begin{aligned}
&b(z)b(w) = \cdots, \qquad c(z)c(w) = \cdots \\
&b(z)c(w) = \frac{1}{z-w} + \cdots
\end{aligned}
\tag{2.107}
$$

ここで，$\cdots$ は $z-w$ について正則な部分を表す．積 $b(z)b(w)$ の展開では，反可換性 $b(z)b(w) = -b(w)b(z)$ により，実際には $z-w$ の 1 次の項からはじまる．積 $c(z)c(w)$ についても同様である．OPE (2.107) より，場 b, c の正規積を

$$
\begin{aligned}
&b(z)b(w) = :b(z)b(w):, \quad c(z)c(w) = :c(z)c(w):, \\
&b(z)c(w) = \frac{1}{z-w} + :b(z)c(w):
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

と与える．ここで縮約は

$$
\begin{aligned}
c\Big(b(z), c(w)\Big) &= \frac{1}{z-w}, \\
c\Big(c(z), b(w)\Big) &= \frac{1}{z-w}
\end{aligned}
\tag{2.109}
$$

であり，$b(z)b(w)$, $c(z)c(w)$ の縮約は 0 である．

$b(z)c(w)$ の OPE の正則部分から

$$
b(z)c(w) = \frac{1}{z-w} + J(w) + O(z-w) \tag{2.110}
$$

によってカレント $J(w)$ を定義する[3)]．あるいは $b(z)c(w)$ の正規積を用いて書けば，

$$
\begin{aligned}
J(w) &= \lim_{z\to w}\left(b(z)c(w) - \frac{1}{z-w}\right) \\
&= \ :b(w)c(w):
\end{aligned}
\tag{2.111}
$$

である．この $J(z)$ と $b(w), c(w)$ との OPE は，Wick の定理により

$$
\begin{aligned}
J(z)b(w) &= \frac{1}{z-w}b(z) + \cdots, \\
J(z)c(w) &= \frac{-1}{z-w}c(z) + \cdots,
\end{aligned}
\tag{2.112}
$$

$$
J(z)J(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + \cdots \tag{2.113}
$$

となる．すなわち，b, c はカレント J に対して電荷 1, -1 をもっている．

---

3) $O(z-w)$ は $(z-w)$ について 1 次以上の項を表す．

次に，ストレステンソル $T(z)$ を構成しよう．$T(z)$ は共形次元が 2 でカレント $J(z)$ に対して中性 (電荷 $=0$) の作用素である．カレント $J=:bc:$ の次元を 1 としたいので，$T(z)$ の候補は $A=:b'c:$ または $B=-:bc':$ の一次結合となる (微分は次元を 1 だけ増やす).

A, B と b, c および J との OPE を計算すると，

$$\begin{aligned}
A(z)b(w) &= \frac{1}{z-w}b'(w)+\cdots, \\
B(z)b(w) &= \frac{1}{(z-w)^2}b(w)+\frac{1}{z-w}b'(w)+\cdots, \\
A(z)c(w) &= \frac{1}{(z-w)^2}c(w)+\frac{1}{z-w}c'(w)+\cdots, \\
B(z)c(w) &= \frac{1}{z-w}c'(w)+\cdots,
\end{aligned} \tag{2.114}$$

および

$$\begin{aligned}
A(z)J(w) &= \frac{-1}{(z-w)^3}+\frac{1}{(z-w)^2}J(w)+\frac{1}{z-w}J'(w)+\cdots, \\
B(z)J(w) &= \frac{1}{(z-w)^3}+\frac{1}{(z-w)^2}J(w)+\frac{1}{z-w}J'(w)+\cdots
\end{aligned} \tag{2.115}$$

を得る．そこで，パラメータ $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
T(z) &= (1-\lambda)A(z)+\lambda B(z) \\
&= :(1-\lambda)b'(z)c(z)-\lambda b(z)c'(z):
\end{aligned} \tag{2.116}$$

とおけば

$$\begin{aligned}
T(z)b(w) &= \frac{\lambda}{(z-w)^2}b(w)+\frac{1}{z-w}b'(w)+\cdots, \\
T(z)c(w) &= \frac{1-\lambda}{(z-w)^2}c(w)+\frac{1}{z-w}c'(w)+\cdots,
\end{aligned} \tag{2.117}$$

および

$$T(z)J(w) = \frac{2\lambda-1}{(z-w)^3}+\frac{1}{(z-w)^2}J(w)+\frac{1}{z-w}J'(w)+\cdots \tag{2.118}$$

が得られる．(2.116) の $T(z)$ のもとで，b, c は共形次元 $\lambda, 1-\lambda$ の primary 場となり，$J(z)$ は共形次元 1 となる．ただし $\lambda=1/2$ 以外の場合は，(2.118) の $(z-w)^{-3}$ の項のために $J(z)$ は primary 場ではない．

$T(z)T(w)$ の OPE を求めるため，Wick の定理を用いて，A, B の OPE を計算すると，

$$A(z)A(w) = \frac{-1}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}A(w) + \frac{1}{z-w}A'(w) + \cdots ,$$

$$A(z)B(w) = \frac{-2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^3}J(w) + \frac{2}{(z-w)^2}B(w) + \frac{1}{z-w}B'(w) + \cdots ,$$

$$B(z)A(w) = \frac{2}{(z-w)^4} + \frac{-2}{(z-w)^3}J(w) + \frac{2}{(z-w)^2}A(w) + \frac{1}{z-w}A'(w) + \cdots ,$$

$$B(z)B(w) = \frac{-1}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}B(w) + \frac{1}{z-w}B'(w) + \cdots . \tag{2.119}$$

したがって

$$T(z)T(w) = \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}T'(w) + \cdots \tag{2.120}$$

が得られる．ここに c は

$$c = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) \tag{2.121}$$

で与えられる．なお，この値は，Hurwitz のゼータ $\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s}$ の特殊値

$$\zeta(-1,\lambda) = -\frac{6\lambda^2 - 6\lambda + 1}{12} \tag{2.122}$$

とも関係している (p.48 脚注参照).

2.7 boson-fermion 対応

荷電 fermion 系にもどって，$U(1)$ カレント $J(z)$, およびストレステンソル $T(z)$ を

$$
\begin{aligned}
J(z) &= :\overline{\psi}(z)\psi(z): , \\
T(z) &= \frac{1}{2}:\overline{\psi}'(z)\psi(z): -\frac{1}{2}:\overline{\psi}(z)\psi'(z):
\end{aligned}
\tag{2.123}
$$

で定義する．これは $\lambda = 1/2$ の bc 系で $b = \overline{\psi}$, $c = \psi$ としたものなので

$$
\begin{aligned}
J(z)J(w) &= \frac{1}{(z-w)^2} + \cdots , \\
T(z)J(w) &= \frac{1}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{z-w}J'(w) + \cdots , \\
T(z)T(w) &= \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}T'(w) + \cdots
\end{aligned}
\tag{2.124}
$$

が成り立つ．boson 場 φ から $J = \varphi'$, $T = 1/2 : J^2 :$ としてつくった J, T もまったく同じ OPE に従っていた．OPE は交換関係と等価であるから，両者は同じ交換関係に従う．実はさらに進んで，fermion と boson の間に直接の対応関係が付けられる．これを **boson-fermion 対応**という．実際 fermion と boson は

$$
\overline{\psi} \leftrightarrow :e^{\varphi}: , \qquad \psi \leftrightarrow :e^{-\varphi}: \tag{2.125}
$$

の対応により，同じ OPE に従うという意味で互いに等価である．これは共形不変な場合に限らず 2 次元の場の理論で基本的な事実である．

ここでは，この対応をより詳しく両者の表現の同型として記述しよう．fermion の表現空間としては，真空ベクトル $\left|0\right\rangle$ に NS 表現の fermion 作用素 $\overline{\psi}_\mu$, ψ_μ たちを作用させて得られる Fock 空間 $F = F^{\mathrm{NS}}$ を考える．F を (J_0, L_0) の固有値 (p, d) で分解した各固有空間 $F_{p,d}$ の次元の母関数 (指標) は

$$
\sum_{p,d} \dim(F_{p,d}) x^p q^d = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^{n-1/2})(1 + x^{-1}q^{n-1/2}) \tag{2.126}
$$

で与えられる．一方，boson の表現空間 H は頂点作用素 $:e^{\pm\varphi}:$ が $U(1)$ 電荷の整数のズラシを与えることを考慮して，$H = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} H_p$ をとる．H_p は boson の荷電真空 $\left|p\right\rangle$ に a_{-m} $(m = 1, 2, \ldots)$ を作用させたものなので，その指標は

$$\sum_{p,d} \dim(H_{p,d}) x^p q^d = \sum_{p\in\mathbf{Z}} x^p q^{p^2/2} \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^m)^{-1} \tag{2.127}$$

で与えられる．両者が等しいことは，**Jacobi 三重積公式**

$$\sum_{p\in\mathbf{Z}} x^p q^{p^2/2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1+xq^{n-1/2})(1+x^{-1}q^{n-1/2}) \tag{2.128}$$

により保証される．表現としての boson-fermion 対応は，H と F の線形同型写像で H における $J, T, :e^{\varphi}:, :e^{-\varphi}:$ の作用と F における $J, T, \overline{\psi}, \psi$ の作用が一致するようなものがあることを主張する．

補足　証明の筋道だけ述べておこう．空間 $H_p = \bigoplus_{d=0}^{\infty} H_{p,d}$ と $F_p = \bigoplus_{d=0}^{\infty} F_{p,d}$ とが，カレント代数 a_n $(n \in \mathbf{Z})$ の表現として既約で同型であることが証明の基本である．残りの作用素については，カレントとの交換関係が一致しているので，Schur の補題より，荷電真空における両者の行列要素の一致を確認すればよい．

以下では，boson-fermion 対応を与える同型写像の具体的な記述を与える．そのために，boson の微分作用素による実現を思い出そう．表現空間は

$$H = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} e^{pt_0}\mathbf{C}[t_1, t_2, \ldots] \tag{2.129}$$

であり，この表現では，頂点作用素 $:e^{k\varphi(z)}:$ は

$$:e^{k\varphi(z)}: = \exp\left(k\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n\right) \exp\left(k \log z \frac{\partial}{\partial t_0} - k\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n}\frac{\partial}{\partial t_n}\right) \tag{2.130}$$

で与えられた (1.4 節)．

線形写像 $\langle t| : F \to H$ を，$|f\rangle \in F$ に対して

$$|f\rangle \mapsto f(t) = \langle t|f\rangle = \sum_{p\in\mathbf{Z}} \langle p| \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} t_n a_n\right) |f\rangle \in H \tag{2.131}$$

と定める．このとき $\langle t|$ は線形写像として同型であり，次が成り立つ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_n}\langle t| &= \langle t|a_n \quad (n \geq 0), \\
nt_n\langle t| &= \langle t|a_{-n} \quad (n > 0), \\
:e^{\varphi(z)}:\langle t| &= \langle t|\overline{\psi}(z), \\
:e^{-\varphi(z)}:\langle t| &= \langle t|\psi(z).
\end{aligned} \tag{2.132}$$

すなわち，この $\langle t|$ が求める同型を与えている．同型 $\langle t|$ をさらに具体的に記述するために，F の半無限外積による実現を考える．この実現では

$$|v\rangle = e_{\frac{5}{2}} \wedge e_{\frac{1}{2}} \wedge e_{-\frac{5}{2}} \wedge e_{-\frac{7}{2}} \wedge \cdots \tag{2.133}$$

のような半無限外積ベクトルで，十分大きな μ に対する e_μ を含まず，十分小さな μ に対する e_μ をすべて含むものが F の基底をなす．この基底への $\psi_\mu, \overline{\psi}_\mu$ の作用を

$$\overline{\psi}_\mu |v\rangle = e_{-\mu} \wedge |v\rangle, \qquad \psi_\mu |v\rangle = \frac{\partial}{\partial e_\mu} |v\rangle \tag{2.134}$$

と定めれば，いままで扱ってきた $\psi_\mu, \overline{\psi}_\mu$ の反交換関係や荷電真空 $|p\rangle$ との関係がすべて満たされている．また，この実現におけるカレント作用素は次で与えられる．

$$a_{-n} = \sum_\mu \overline{\psi}_{-n-\mu}\psi_\mu = \sum_\mu e_{\mu+n}\frac{\partial}{\partial e_\mu} \qquad (n \neq 0) \tag{2.135}$$

さらに，F の基底 (2.133) を次のような図で表すのが便利である．

$$|v\rangle = |\cdots\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\bullet}\ \underline{\ \ }\ \underline{\bullet}\,\big|\,\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\bullet}\ \underline{\bullet}\ \underline{\bullet}\ \cdots\rangle \tag{2.136}$$

すなわち，半整数 $\ldots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ のラベルのついた横一列の箱 (皿) を用意し，e_μ が $|v\rangle$ に現れるとき箱 μ に玉 ● を置く (図ではラベルの正負の境界線を | で示した)．これを **マヤ図形**とよぶ[4]．一つの箱に一つの玉しか置けないところが fermion の特徴である (**Pauli の排他原理**)．Dirac に従い，境界の左にある玉を**粒子**，境界の右の空箱を**反粒子**とよぶと，

$$(\text{粒子数}) - (\text{反粒子数}) = (\text{電荷}) \tag{2.137}$$

となる．このとき，玉を左右に移動させても電荷は変わらない．与えられた電荷 p の状態のうちで玉がビッシリと右側に詰まった状態が，電荷 p の真空 $|p\rangle$ となる[5]．例えば，$p = 1$ ならば

$$|1\rangle = |\cdots\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\bullet}\,\big|\,\underline{\bullet}\ \underline{\bullet}\ \underline{\bullet}\ \underline{\bullet}\ \underline{\bullet}\ \cdots\rangle \tag{2.138}$$

---

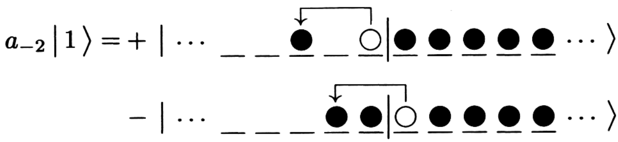
4) 式 (2.133) の積の順序と対応させる都合上，標準的な記法と左右が逆になっている．

5) 真空とは何もない状態ではなく，負エネルギー状態がすべて埋め尽くされた状態 (Dirac の海) とする．(2.122) は「海」状態 $|0\rangle$ のもつエネルギーとして，

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda + n) = \frac{6\lambda^2 - 6\lambda + 1}{12} = -\frac{c}{24}$$

を与える (ここでは $\lambda = 1/2$, $c = 1$)．

である．a_n の作用は各玉を n だけ左へ移動させたものの和で与えられる．ただし，行き先がすでに詰まっているときはそのような移動は禁止する．また移動する際に途中で他の玉を飛び越えた場合には，その個数だけの符号をつける．例えば



(2.139)

となる (○ にあった玉が移動した)．マヤ図形表示のベクトル $|v\rangle$ の B による像は，1.6 節の計算から，Schur 多項式により

$$e^{pt_0}s_\lambda(t_1, t_2, \ldots) \tag{2.140}$$

と与えられる．ここに p は $|v\rangle$ の電荷であり，λ は，マヤ図形から次の規則で定まる分割 (Young 図形) を表す．すなわち，マヤ図形を右から順に見て，● のとき「上」，＿ のとき「右」と進んで得られる道を考え，その道が左上隅につくる Young 図形に対応する分割が λ である．例えば，マヤ図形が (2.136) の場合には，図 2.1 のようにして，分割 $\lambda = (3, 2)$ が対応する[6]．

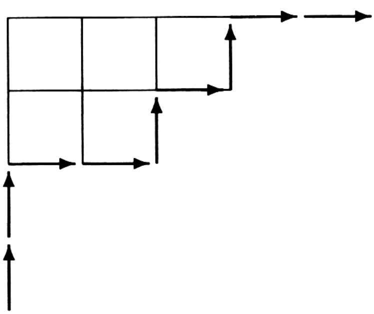


図 2.1　マヤ図形と Young 図形の対応規則

boson-fermion 対応は $\lambda = 1/2$ の場合に限らず，一般の bc 系について

$$b \leftrightarrow\ :e^{\varphi}:, \qquad c \leftrightarrow\ :e^{-\varphi}: \tag{2.141}$$

として成り立つ．それだけでなく，場 b, c の微分多項式で与えられるすべての

6) このマヤ図形と Young 図形の対応は，Jacobi 三重積公式 (2.128) の組合せ的証明を与える．

場の作用素についても対応する boson 場の表示が存在する．共形次元 h と電荷 Q の値によって対応すべき作用素を表にすれば，次のようになる．(以下，正規積の記号は省略する．)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 1 & & & & & & 1 & & \\
 & b & & c & & & & e^{\varphi} & & e^{-\varphi} & \\
 & & bc & & & & & & \varphi' & & \\
 & b' & & c' & & \leftrightarrow & & \varphi' e^{\varphi} & & \varphi' e^{-\varphi} & \\
b'b & & b'c, bc' & & c'c & & e^{2\varphi} & & \varphi'', \varphi'^2 & & e^{-2\varphi} \\
 & & \vdots & & & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

実際の対応では，各々で適当な一次結合をとらなければならない．例えば $h=2$ で $Q=0$ の作用素はともに 2 次元あるが，その対応関係は

$$b'c + bc' = \varphi'', \qquad b'c - bc' = (\varphi')^2 \tag{2.142}$$

であり，とくに

$$T(z) = (1-\lambda)b'c - \lambda bc' = \frac{1}{2}(\varphi')^2 + \rho\varphi'', \qquad \rho = \frac{1}{2} - \lambda \tag{2.143}$$

となっている．また，このとき $e^{\alpha\varphi}$ の共形次元は

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\rho) = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 2\lambda - 1) \tag{2.144}$$

で与えられる．これらの関係により，bc 系は twist されたストレステンソル T_ρ をもつ boson 系と等価となる．

最後に，boson-fermion 対応の応用として，両者の相関関数の関係をみておこう．例として $\mathbf{P}^1$ 上の相関関数を考える．頂点作用素の積の真空期待値は

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \,\middle|\, V_{\alpha_1}(z_1) \cdots V_{\alpha_N}(z_N) \,\middle|\, 0 \right\rangle = \prod_{1 \le i < j \le N} (z_i - z_j)^{\alpha_i \alpha_j} \tag{2.145}$$

であった．これより boson 場 φ で表示された bc 系の相関関数は次で与えられる．

$$\left\langle m-n \,\middle|\, b(z_1) \cdots b(z_m) c(w_n) \cdots c(w_1) \,\middle|\, 0 \right\rangle$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{1 \le i < j \le m} (z_i - z_j) \prod_{1 \le i < j \le n} (w_j - w_i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (z_i - w_j)} \tag{2.146}$$

一方，fermion としての bc 系の相関関数は行列式で表され，例えば $m \geq n$ の場合 ($m \leq n$ でも同様の式がある)，

$$
\left\langle m-n \,\middle|\, b(z_1)\cdots b(z_m)c(w_n)\cdots c(w_1) \,\middle|\, 0 \right\rangle
= \det \begin{bmatrix}
z_1^{m-n-1} & \cdots & z_1 & 1 & \dfrac{1}{z_1-w_1} & \cdots & \dfrac{1}{z_1-w_n} \\
z_2^{m-n-1} & \cdots & z_2 & 1 & \dfrac{1}{z_2-w_1} & \cdots & \dfrac{1}{z_2-w_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
z_m^{m-n-1} & \cdots & z_m & 1 & \dfrac{1}{z_m-w_1} & \cdots & \dfrac{1}{z_m-w_n}
\end{bmatrix} \tag{2.147}
$$

となる．(2.146) (2.147) が等しいことは，boson-fermion 対応の帰結である．これは，Vandermonde 行列式，Cauchy 行列式としてよく知られた公式の一般化になっており，極と零点および次数の考察 (OPE による相関関数の特徴づけにほかならない) から直接証明できる．また，Wick の定理より，Ω を電荷 $q=m-n$ の純テンソル作用素として，

$$
\frac{\left\langle q \,\middle|\, \Omega b(z_1)\cdots b(z_n)c(w_n)\cdots c(w_1) \,\middle|\, 0 \right\rangle}{\left\langle q \,\middle|\, \Omega \,\middle|\, 0 \right\rangle}
= \det \left[\frac{\left\langle q \,\middle|\, \Omega b(z_i)c(w_j) \,\middle|\, 0 \right\rangle}{\left\langle q \,\middle|\, \Omega \,\middle|\, 0 \right\rangle} \right]_{1\leq i,j\leq n} \tag{2.148}
$$

が成り立つ．

2.8 bc 系の経路積分

bc 系は非常に簡単な作用積分による記述をもつ．それを手短に説明しよう．いま $b=b(z,\bar{z})$, $c=c(z,\bar{z})$ を 2 次元空間 Σ の反可換な古典場とする．2 次元空間 Σ には複素構造が入っていて，$z, \bar{z}$ はその正則および反正則な局所座標とする．そこで次の作用積分

$$
S = \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma dz d\bar{z}\; b\bar{\partial}c \tag{2.149}
$$

を考えよう．場 b, c がそれぞれ $(\lambda, 0)$ 形式，$(1-\lambda, 0)$ 形式として変換するならば，$b\bar{\partial}c$ は $(1,1)$ 形式となり，積分 S は座標不変な意味をもつ．b, c の運動

方程式は S の変分より与えられ

$$\bar{\partial} b = 0, \qquad \bar{\partial} c = 0, \tag{2.150}$$

すなわち，b, c ともに正則となる．ここで，経路積分の方法により量子論へ移行する．すなわち，相関関数を形式的な積分

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{O} e^S \tag{2.151}$$

により「定義」する．ここで，$\int$ はすべての場 $b(z,\bar{z}), c(z,\bar{z})$ にわたって積分する，という気持ちである．無限次元の積分なので厳密な定義にはなっていないが，作用 S が二次形式だから自由場であり，Wick の定理が使えると期待される．ここでは，こうした定式化のひとつの応用として Riemann-Roch の定理をみておこう．

二次形式 S を定める線形作用素は $(1-\lambda, 0)$ 形式から $(1-\lambda, 1)$ 形式への微分 $\bar{\partial}$ であり，その逆行列 (グリーン関数) が基本的である．もちろん逆行列を考える前に $\bar{\partial}$ の Ker(核) と Coker(余核) を調べておかなければならない．Grassmann 積分の性質により，相関関数

$$\langle b(z_1) \cdots b(z_m) c(w_n) \cdots c(w_1) \rangle = \int b(z_1) \cdots b(z_m) c(w_n) \cdots c(w_1) e^S \tag{2.152}$$

が 0 でないのは

$$\begin{aligned} n - m &= \text{index } \bar{\partial} \\ &= \dim(\text{Ker } \bar{\partial}) - \dim(\text{Coker } \bar{\partial}) \end{aligned} \tag{2.153}$$

の場合に限られる．λ を整数または半整数として，H_λ を Σ 上の正則 λ 形式の空間とすれば，(2.153) の右辺は

$$\dim(H_{1-\lambda}) - \dim(H_\lambda) \tag{2.154}$$

のように書ける．

一方，カレントを挿入した相関関数

$$\langle J(x) b(z_1) \cdots b(z_m) c(w_n) \cdots c(w_1) \rangle \tag{2.155}$$

を考えると，x については (OPE より) $x = z_i$ と $x = w_j$ にそれぞれ留数 $1, -1$ の極をもつので，$m - n$ は (2.155) の x に関する全留数である．全留数が 0 にならないのは，$J(x)dx$ が正しく 1 形式として変換しないことの反映である．1 形式の変換則のずれと全留数の関係を知るために，有理 k 形式 $\psi = \psi(z)\, dz^k$ の対数微分 $a(z) = \psi'(z)/\psi(z)$ を考えよう．その変換則は

$$a(z)\,dz = a(w)dw + k\frac{w''}{w'}\,dz \tag{2.156}$$

である[7)]．このような「ずれた 1 形式」$a = a(z)\,dz$ の全留数は

$$(\psi \text{ の零点の個数}) - (\psi \text{ の極の個数}) = 2k(g-1) \tag{2.157}$$

と与えられる．ここに，g は 2 次元面 Σ の**種数** (穴の数) である (図 2.2)．とくに，$k=-1$ で $\psi = \psi(z)\dfrac{d}{dz}$ (ベクトル場) の場合には，零点の個数は Σ の Euler 数 $\chi(\Sigma) = 2-2g$ に等しい．

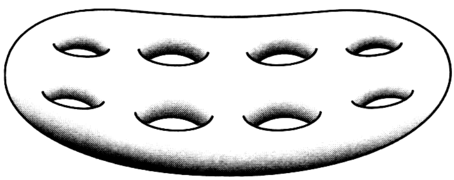


図 2.2　種数 $g=8$ の Riemann 面

(2.156) と $J(z)$ の変換則 (2.118) を比較すると $k = \lambda - \frac{1}{2}$ となるので，結局 $J(z)$ の全留数 $m-n$ は $(2\lambda-1)(g-1)$ となる．以上の考察から次がいえた．

$$\dim(H_{1-\lambda}) - \dim(H_\lambda) = (1-2\lambda)(g-1) \tag{2.158}$$

これは種数 g の Riemann 面に関する **Riemann-Roch の定理**である．以上のように，経路積分による方法は直観的で，発見法として有効である．

7)　この変換則については後の 3.3 節で再度議論する．

3章

ミニマル模型

本章では，BPZ ミニマル模型とよばれる共形場理論の典型的な模型を考察する．Virasoro 代数の表現論と相関関数の計算とが巧みに融和して理論が構成される．この模型には，共形場理論の要点が凝縮されているといえる．超お急ぎの読者は，この章だけを読まれてもよい．

3.1 Virasoro 代数の最高重み表現

ロシアの 3 人の理論物理学者 Belavin (ベラビン)，Polyakov (ポリヤコフ)，Zamolodchikov (ザマロトチコフ) は，1984 年の記念碑的論文 BPZ [1] において，二次共形場理論の基礎を一撃のもとに確立した．その成果は，二次元臨界現象・弦理論・可積分系などの研究に革命的な進展をもたらした．

BPZ の結果の数学的側面を要約すれば，Kac (カッツ)，Feigin (フェイギン)-Fuchs (フックス) 等により解明されつつあった Virasoro 代数の表現論を，場の理論に巧みに取り込み，**ミニマル模型**とよばれる精巧な理論を作り上げた，ということができる．本章ではその概要を紹介するが，まず，基礎となる Virasoro 代数と共形変換の関係から確認しておこう．

Virasoro 代数は $\mathbf{C}$ 上 L_n $(n \in \mathbf{Z})$ および中心 c で生成される無限次元の Lie 代数であり，交換関係は

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \tag{3.1}$$

で与えられた．(式 (2.30) は $c = 1$ の場合である．)

1) A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory”, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333–380.

微分作用素 l_n を

$$l_n = -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.2}$$

とする．l_n たちは，$\mathbf{C}\setminus\{0\}$ におけるベクトル場であり，無限小の等角変換のなす Lie 代数

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n} \tag{3.3}$$

を生成する．Virasoro 代数は，この代数 (3.3) に中心 c を付加して得られる代数，すなわち (3.3) の**中心拡大**である．ここで，中心 (center) とはすべての元と可換な元を意味し，個々の既約表現では，中心 c を一つの複素数としてよい．その値を**中心電荷** (central charge) という．

代数 (3.3) の中心拡大は，本質的に式 (3.1) の形しかない．このことを示そう．

証明． 一般の中心拡大を

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + c_{m,n} \tag{3.4}$$

($c_{m,n}$ は中心) とする．(3.4) の反対称性から $c_{m,n} = -c_{n,m}$，また Jacobi 恒等式から

$$(m-n)c_{l,m+n} + (n-l)c_{m,n+l} + (l-m)c_{n,l+m} = 0 \tag{3.5}$$

が要求される．この解 $c_{n,m}$ のうちで，生成元の取り換え

$$\begin{aligned} L_n &\to L_n + c_n, \\ c_{m,n} &\to c_{m,n} - (m-n)c_{m+n} \end{aligned} \tag{3.6}$$

に吸収されないような非自明なものがどれほどあるかを問題にする．まず，$c_n = \frac{1}{n}c_{n,0}$ $(n \neq 0)$, $c_0 = \frac{1}{2}c_{1,-1}$ として (3.6) の変換をすると $c_{n,0} = 0$ $(n \neq 0)$, $c_{1,-1} = 0$ とできる．以下，この状況で考える．そのとき，Jacobi 恒等式 (3.5) で $l = 0$ とおくと

$$(n+m)c_{m,n} = (n-m)c_{0,m+n}, \tag{3.7}$$

ゆえに $n+m=0$ でないかぎり $c_{n,m}=0$ がわかる．さらに，Jacobi 恒等式 (3.5) で $l = -n+1$, $m = -1$ とおくと

$$(-1-n)c_{-n+1,n-1} + (2n-1)c_{1,-1} + (-n+2)c_{n,-n} = 0, \tag{3.8}$$

したがって $c_{1,-1} = 0$ を使えば

$$c_{n,-n} = \frac{(n+1)}{(n-2)}c_{n-1,-n+1} \tag{3.9}$$

となる．そこで，$c_{2,-2} = \frac{c}{2}$ とすると

$$c_{m,n} = \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$$

となる．すなわち，代数 (3.3) の中心拡大は一次元で，Virasoro 代数 (3.1) しかないことがわかった． □

Virasoro 代数の最高重み表現を考えよう．交換関係 (3.1)

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \tag{3.10}$$

で，$m=0$ とおくと

$$[L_0, L_n] = -nL_n \tag{3.11}$$

を得る．L_0 の固有値を**共形次元**または**重み**とよぶが，L_n は重みを n だけ下げる作用をする．

Virasoro 代数の表現として次のようなものを考えよう．まず，ベクトル $\left|h\right\rangle$ を

$$L_n\left|h\right\rangle = 0 \quad (n>0), \qquad L_0\left|h\right\rangle = h\left|h\right\rangle \tag{3.12}$$

を満たすものとする．このベクトル $\left|h\right\rangle$ に，有限個の Virasoro 代数の元を作用させて得られるベクトルの全体を V_h と表す．V_h を L_0 の固有値により固有分解して，固有値 $L_0 = h+n$ (n は非負整数) の固有空間を $V_h(n)$ で表す．小さな n について基底ベクトルを書き下してみると，

$$\left|\begin{array}{c|c} 0 & \left|h\right\rangle \\ 1 & L_{-1}\left|h\right\rangle \\ 2 & L_{-2}\left|h\right\rangle,\ L_{-1}^2\left|h\right\rangle \\ 3 & L_{-3}\left|h\right\rangle,\ L_{-2}L_{-1}\left|h\right\rangle,\ L_{-1}^3\left|h\right\rangle \end{array}\right| \tag{3.13}$$

などとなる．$L_{-1}, L_{-2}, \ldots$ の並べ方の順序を変えると一般には異なるベクトルになるが，基底をつくるにはどの並べ方を用いてもよい．例えば $n=3$ の例では，$L_{-2}L_{-1}\left|h\right\rangle$ の代わりに

$$L_{-1}L_{-2}\left|h\right\rangle = L_{-2}L_{-1}\left|h\right\rangle + L_{-3}\left|h\right\rangle$$

を用いてもよい．一般に，$V_h(n)$ の基底としては

$$L_{-p}^{m_p}L_{-q}^{m_q}\cdots L_{-r}^{m_r}\left|h\right\rangle, \tag{3.14}$$

ただし

$$pm_p + qm_q + \cdots + rm_r = n \qquad (p>q>\cdots>r>0)$$

なるものがとれる．これは，Poincaré-Birkhoff-Witt の定理とよばれるものの例である．したがって，$\dim V_h(n) = p(n)$ (分割数) となる．

V_h は, Virasoro 代数が (左から) 作用する左 Virasoro 加群である. 右 Virasoro 加群 V_h^* も同様に定義される. まず, ベクトル $\langle h |$ を

$$\langle h | L_n = 0 \quad (n < 0), \qquad \langle h | L_0 = h \langle h | \tag{3.15}$$

を満たすものとする. このベクトル $\langle h |$ に有限個の Virasoro 代数の元を作用させて得られるベクトルたち全体を V_h^* と表す. V_h^* も L_0 の固有値により固有分解され, 固有値は

$$L_0 = h + n \qquad (n \text{ は非負整数})$$

の固有空間を $V_h^*(n)$ で表す. 小さな n について基底ベクトルを書き下してみると

$$\left|\begin{array}{c|c} 0 & \langle h | \\ 1 & \langle h | L_1 \\ 2 & \langle h | L_2,\ \langle h | L_1^2 \\ 3 & \langle h | L_3,\ \langle h | L_1 L_2,\ \langle h | L_{-1}^3 \end{array}\right| \tag{3.16}$$

などとなる. 一般に, $V_h^*(n)$ の基底としては

$$\langle h | L_r^{m_r} \cdots L_q^{m_q} L_p^{m_p}, \tag{3.17}$$

ただし

$$pm_p + qm_q + \cdots + rm_r = n \qquad (p > q > \cdots > r > 0)$$

なるものがとれる. 実は, (積の順序を逆にする) 変換

$$L_n \to L_{-n}, \quad c \to c, \quad | h \rangle \to \langle h | \tag{3.18}$$

によって V_h における関係式はそのまま V_h^* の関係式に逐語訳可能なので, あらためて計算を繰り返す必要はない.

表現 V_h, V_h^* には, 自然な双線形写像 $V_h^* \times V_h \to \mathbf{C}$ が 次の性質により一意的に定まる.

$$\begin{aligned} &\langle h | \cdot | h \rangle = 1 \equiv \langle h | h \rangle, \\ &\langle u | L_n \cdot | v \rangle = \langle u | \cdot L_n | v \rangle \equiv \langle u | L_n | v \rangle \end{aligned} \tag{3.19}$$

ここに $\langle u | \in V_h^*$, $| v \rangle \in V_h$, $n \in \mathbf{Z}$ である. ペアリング $V_h^*(m) \times V_h(n) \to \mathbf{C}$ は $m \neq n$ のとき 0 である. $m = n = 1$ では,

$$\langle h | L_1 L_{-1} | h \rangle = 2h, \tag{3.20}$$

$m = n = 2$ では,

$$\begin{bmatrix} \langle h \,|\, L_2 L_{-2} \,|\, h \rangle & \langle h \,|\, L_2 L_{-1}^2 \,|\, h \rangle \\ \langle h \,|\, L_1^2 L_{-2} \,|\, h \rangle & \langle h \,|\, L_1^2 L_{-1}^2 \,|\, h \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4h + \frac{c}{2} & 6h \\ 6h & (2h+1)4h \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

などとなる.

3.2 primary 場とストレステンソル

共形場理論でもっとも重要な対象は **primary 場**である. 複素座標 z に依存する場の作用素 $\Phi(z)$ で, 交換関係

$$[L_n, \Phi(z)] = z^n \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h(n+1) \right) \Phi(z) \tag{3.22}$$

に従うものを (次元 h の) primary 場とよぶのであった ((2.53) 参照).

以下に, この式の幾何学的意味を説明しよう. z を複素平面上のある点のまわりの局所座標とする. この点のまわりの (スカラー) 関数は, z の解析関数 $f(z)$ で表される. 別の局所座標 $w = w(z)$ に移れば, 別の関数 $g(w)$ で表示されるが, 両者は

$$f(z) = g(w) \tag{3.23}$$

で結ばれている. もう少し一般に, 座標系 $z, w, \ldots$ ごとに, 解析関数 $f(z)$, $g(w), \cdots$ により表され, 座標近傍の交わりにおけるそれらの関係が

$$f(z)dz^h = g(w)dw^h \tag{3.24}$$

で結ばれているとき, これらは一つの幾何学的対象を表す. これを h **形式**という[2]. ここで, 無限小変換

$$w = z + \delta z(z), \qquad g(z) = f(z) + \delta f(z) \tag{3.25}$$

の場合に, h 形式の関数形の変化 δf をみると,

$$\delta f(z) = -\left(\delta z \frac{\partial}{\partial z} + h(\delta z)' \right) f(z) \tag{3.26}$$

を得る. とくに $\delta z = -z^{n+1}$ の場合には, この右辺の微分作用素は, 式 (3.22) の右辺の微分作用素にほかならない.

---

2) 微分幾何などで使う h 次微分形式 (反対称テンソル場) のことではない.

以上の準備のもとで交換関係 (3.22) を見直すと，「L_n の生成する無限小座標変換で $\Phi(z)$ が h 形式として変換する」と読むことができる．重み h の primary 場とは，h 形式として変換する場の作用素にほかならない．

L_n は無限小座標変換の生成子という意味をもっているので，それ自身，座標変換のもとで不変 (または共変な) 対象のはずである．それをみるために，L_n の母関数であるストレステンソル $T(z)$ を考える．

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n z^{-n-2} \tag{3.27}$$

このとき，次が示される．

$$[L_n, T(z)] = z^n \left(z\frac{\partial}{\partial z} + 2(n+1) \right) T(z) + \frac{c}{12}(z^{n+1})''' \tag{3.28}$$

実際，左辺は交換関係より

$$\begin{aligned}
[L_n, T(z)] &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} [L_n, L_m] z^{-m-2} \\
&= \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left((n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \right) z^{-m-2} \\
&= z^n \sum_{k \in \mathbf{Z}} (2n-k) L_k z^{-k-2} + \frac{c}{12}(n^3-n) z^{n-2} \\
&= z^n \left(z\frac{d}{dz} + 2(n+1) \right) \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} L_k z^{-k-2} \right) + \frac{c}{12}(z^{n+1})'''
\end{aligned} \tag{3.29}$$

となって右辺が得られる．

交換関係 (3.22) および (3.28) は，(2.36) と同様に，OPE で表すと

$$\begin{aligned}
T(z)\Phi(w) &= \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w) + \frac{1}{z-w}\Phi'(w) + \cdots, \\
T(z)T(w) &= \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}T'(w) + \cdots
\end{aligned} \tag{3.30}$$

となる．

次に，primary 場の相関関数への，ストレステンソルの挿入についてみておく．真空状態は

$$\langle 0 | T_-(z) = 0, \qquad T_+(z) | 0 \rangle = 0, \tag{3.31}$$

ただし

$$T_+(z) = \sum_{n \geq -1} L_n z^{-n-2}, \qquad T_-(z) = \sum_{n < -1} L_n z^{-n-2} \tag{3.32}$$

により定義される．交換関係より

$$\begin{aligned}[T_+(z), T(w)] &= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}T'(w), \\ -[T_-(z), T(w)] &= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}T'(w).\end{aligned} \tag{3.33}$$

同様に，重み h の primary 場 Φ に対して

$$\begin{aligned}[T_+(z), \Phi(w)] &= \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w) + \frac{1}{z-w}\Phi'(w), \\ -[T_-(z), \Phi(w)] &= \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w) + \frac{1}{z-w}\Phi'(w).\end{aligned} \tag{3.34}$$

これより，(2.12) と同様の計算により，m 個の primary 場 Φ_i (次元 h_i) と $n+1$ 個のストレステンソルの挿入された真空期待値について

$$\begin{aligned}&\langle T(z)T(z_1)\cdots T(z_n)\Phi_1(w_1)\cdots\Phi_m(w_m)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{c/2}{(z-z_i)^4}\langle T(z_1)\cdots\widehat{T(z_i)}\cdots T(z_n)\Phi_1(w_1)\cdots\Phi_m(w_m)\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right]\langle T(z_1)\cdots T(z_n)\Phi_1(w_1)\cdots\Phi_m(w_m)\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{h_i}{(z-w_i)^2} + \frac{1}{z-w_i}\frac{\partial}{\partial w_i}\right]\langle T(z_1)\cdots T(z_n)\Phi_1(w_1)\cdots\Phi_m(w_m)\rangle\end{aligned}$$

(ただし $\hat{}$ はその因子を除くことを意味する.) (3.35)

が導かれる．これはストレステンソル $T(z)$ の挿入に対する **Ward 恒等式**と解釈できる．この関係により，一般の n の場合は $n=0$ の場合に帰着する．

3.3 変換の異常項

式 (3.28) より，ストレステンソル $T(z)$ は，ほとんど次元 2 の primary 場である．「ほとんど」というのは，中心 c に比例するおつりの項を除いて，という意味である．このようなおつりは一般に**異常項** (anomaly term) とよばれる．

交換関係 (3.22) が，h 形式の変換公式 (3.24) に対応するとすれば，交換関係 (3.28) に従う $T(z)$ の変換公式はどのようなものであろうか．実は，対応する変換公式として次が知られている．

$$T(z)dz^2 = T(w)dw^2 + \frac{c}{12}\{w,z\}dz^2 \tag{3.36}$$

ここに $\{w,z\}$ は **Schwarz 微分**

$$\{w,z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 \tag{3.37}$$

である．この変換公式 (3.36) が変換の合成に対して整合性をもつことは，次により確かめられる．

$$\begin{aligned}\{w,x\} &= \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 (\{w,z\} - \{x,z\}),\\ \{w,z\} &= -\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \{z,w\}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

また，a,b,c,d を定数とすると

$$\left\{\frac{aw+b}{cw+d}, z\right\} = \{w,z\} \tag{3.39}$$

であり，とくに

$$\{w,z\} = 0 \Longleftrightarrow w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{3.40}$$

である．ここに現れた可逆な一次分数変換 $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ の全体は，行列式が 1 である 2×2 行列のなす群 $SL(2,\mathbf{C})$ と同型な群となる[3]．L_{-1}, L_0, L_1 は Virasoro 代数の部分代数をなし，群 $SL(2,\mathbf{C})$ の Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ を生成する．

ここでは，自由 boson カレントからつくったストレステンソル

$$T(z) = \frac{1}{2} : J(z)J(z) : \tag{3.41}$$

を例にして，変換 (3.36) のおつりの項の意味を考えてみよう．結論からいえば，このおつりの由来は，正規積の定義

$$: J(z)J(z) : = \lim_{w\to z}\left(J(z)J(w) - \frac{1}{(z-w)^2}\right) \tag{3.42}$$

が座標依存であることにある．これを確かめるために，共形変換 $z \mapsto \tilde{z} = f(z)$ のもとで，正規積の変換を計算してみよう．$J = J(z)dz$ の 1 形式としての変換則から，

$$J(z)J(w) = f'(z)f'(w)J(\tilde{z})J(\tilde{w}), \tag{3.43}$$

3) 正確には $SL(2,\mathbf{C})$ の部分群 $\{\pm 1\}$ による商 $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ に同型．

すなわち

$$:J(z)J(w): + \frac{1}{(z-w)^2} = f'(z)f'(w)\left[:J(\tilde{z})J(\tilde{w}): + \frac{1}{(\tilde{z}-\tilde{w})^2}\right] \quad (3.44)$$

である．これより，変換則へのおつりの項は

$$\lim_{z\to w}\left[\frac{f'(z)f'(w)}{\{f(z)-f(w)\}^2} - \frac{1}{(z-w)^2}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{f'''(w)}{f'(w)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(w)}{f'(w)}\right)^2\right] \quad (3.45)$$

となる．したがって，$T = T(z)dz^2$ の座標変換 $\tilde{z} = f(z)$ に対する変換則は

$$T(z)dz^2 = T(\tilde{z})d\tilde{z}^2 + \frac{1}{12}\{\tilde{z}, z\}dz^2 \quad (3.46)$$

となり，これはたしかに一般公式 (3.36) の $c = 1$ の場合になっている．

以上は 2 形式 $T = T(z)dz^2$ の異常な変換則の考察であった．同様に，1 形式 (カレント) $a = a(z)dz$ についても，異常項のある変換 (2.156)，すなわち

$$a(z)dz = a(w)dw + k\frac{w''}{w'}dz \quad (3.47)$$

が考えられる．この変換則を Virasoro 代数との交換関係，あるいはストレステンソルとの OPE として書けば

$$\begin{aligned}
[L_n, a(w)] &= z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)\right)a(z) + k(z^{n+1})'', \\
T(z)a(w) &= \frac{2k}{(z-w)^3} + \frac{1}{(z-w)^2}a(w) + \frac{1}{z-w}a'(w) + \cdots
\end{aligned} \quad (3.48)$$

となる．(3.47) の変換則は k 形式の対数微分としても現れる．すなわち k 形式の変換則 $\psi(w) = \psi(z)\left(\dfrac{dz}{dw}\right)^k$ から，その対数微分 $a = (\log\psi)'$ は上記の変換則に従う．

(3.47) のような変換に従うカレントの例として，我々はすでに，bc 系のカレント J を知っている．この場合の異常項の原因は，やはりカレントの定義

$$J(w) = :b(w)c(w): = \lim_{z\to w}\left(b(z)c(w) - \frac{1}{z-w}\right) \quad (3.49)$$

の正規積にある．実際，b, c の共形次元を λ, $1-\lambda$ とすれば，

$$\lim_{z\to w}\left[\frac{f'(z)^\lambda f'(w)^{1-\lambda}}{f(z)-f(w)} - \frac{1}{z-w}\right] = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\frac{f''(w)}{f'(w)} \quad (3.50)$$

となり，$J = J(z)dz$ の座標変換 $w = w(z)$ に対する変換則は，(3.47) で

$k=\lambda-1/2$ としたものとなる．

同様にして，bc 系のストレステンソルの変換の異常項も

$$\lim_{z\to w}\left[\left\{(1-\lambda)\frac{\partial}{\partial z}-\lambda\frac{\partial}{\partial w}\right\}\left\{\frac{f'(z)^{\lambda}f'(w)^{1-\lambda}}{f(z)-f(w)}-\frac{1}{z-w}\right\}\right]$$
$$=-\frac{6\lambda^2-6\lambda+1}{6}\{f(w),w\} \tag{3.51}$$

により説明される．

以上のように，場の量子論では，発散量の正則化の手続きにより，座標変換やゲージ変換等の変換則におつりがでる可能性がある．また，このために，古典論のレベルで存在した対称性が，量子論のレベルで壊れることがある．これらの現象を**異常** (anomaly) とよぶ．経路積分法では，積分の変換における Jacobian の効果として説明され，これを**藤川の方法**という．Virasoro 代数の中心 c は，共形変換に対する異常項を表しているので，**共形異常**ともよばれる．また，自由 boson $\varphi(z)$ (古典的には共形次元 0 のスカラー) の指数関数である頂点作用素 : $e^{\alpha\varphi(z)}$: が次元 $\alpha^2/2$ をもつことも一種の異常であり，これは**異常次元**とよばれる．

3.4 descendant 場

2 つの primary 場 $\Phi_i(z)$ を考える．その共形次元を h_i としよう $(i=1,2)$．

$$T(z)\Phi_i(w)=\frac{h_i}{(z-w)^2}\Phi_i(w)+\frac{1}{z-w}\partial\Phi_i(w)+\cdots \tag{3.52}$$

さて，こららの場の積 $\Phi_1(z)\Phi_2(w)$ が定義できたとすると，その OPE はどのようになるであろうか？　その OPE を次のように仮定してみよう．

$$\Phi_1(z)\Phi_2(w)=(z-w)^{\gamma}\Big(A(w)+(z-w)B(w)+\cdots\Big) \tag{3.53}$$

このとき，展開の初項 $A(w)$ 自身がまた primary 場であることがいえる．

証明． 積 $\Phi_1(z)\Phi_2(w)$ に L_n を作用させて

$$[L_n,\Phi_i(z)]=z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z}+h_i(n+1)\right)\Phi_i(z) \tag{3.54}$$

を用いると

$$[L_n,\Phi_1(z)\Phi_2(w)]$$
$$=\left[z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z}+h_1(n+1)\right)+w^n\left(w\frac{\partial}{\partial w}+h_2(n+1)\right)\right]\Phi_1(z)\Phi_2(w). \tag{3.55}$$

これに (3.53) を代入して両辺の初項 $(z-w)^\gamma$ の係数を比較すると

$$[L_n, A(w)] = w^n \left(w\frac{\partial}{\partial w} + (\gamma + h_1 + h_2)(n+1) \right) A(w) \tag{3.56}$$

を得る．これは，$A(w)$ が primary 場であることを意味する． □

この証明より，$A(w)$ が，次元 h_3 の primary 場 Φ_3 であるとすれば，考えている OPE は

$$\Phi_1(z)\Phi_2(w) = (z-w)^{h_3-h_1-h_2}\Phi_3(w) + \cdots \tag{3.57}$$

となる．この式における指数 $\gamma = h_3 - h_1 - h_2$ は次元の考察からも簡単に理解できる．

OPE (3.53) の $B(w)$ 以下の後続項についても，その形は原理的に決まっている．それを記述するために，場 $\mathcal{O}(w)$ (これは primary でなくてもよい) への L_n 作用素の作用を次で定義する (積分路は点 w を正方向に周回する道).

$$\mathcal{O}(w) \mapsto L_n\mathcal{O}(w) = \oint_w \frac{dz}{2\pi i}(z-w)^n T(z)\mathcal{O}(w), \tag{3.58}$$

あるいは，同じことであるが，OPE

$$T(z)\mathcal{O}(w) = \sum_n (z-w)^{-n-2} L_n\mathcal{O}(w) \tag{3.59}$$

の展開係数として $L_n\mathcal{O}(w)$ を定義する．とくに $\mathcal{O}(w)$ が重み h の primary 場であれば，その OPE より

$$\begin{aligned} &L_n\Phi(w) = 0 \qquad (n>0), \\ &L_0\Phi(w) = h\Phi(w), \\ &L_{-1}\Phi(w) = \frac{\partial}{\partial w}\Phi(w) \end{aligned} \tag{3.60}$$

となるので，$\Phi(w)$ が最高重みベクトルに対応することが読みとれる．また，上記の L_n の作用の定義を形式的に

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_n L_n (z-w)^{-n-2}, \\ L_n &= \oint_w \frac{dz}{2\pi i}(z-w)^n T(z) \end{aligned} \tag{3.61}$$

と表せば，これは，ストレステンソルのモード展開の式 (ただし原点を w に移したもの) である．この場合も，積分路の操作によって，L_n の $\mathcal{O}(w)$ への作用が Virasoro 代数の表現になることが従う．こうして，ストレステンソルは，各

点ごとに Virasoro 代数の表現をつくっていることがわかる．

primary 場に，上の意味での Virasoro 代数の作用で次々と構成される場を **descendant 場**という (descendant は「子孫」の意)．その全体は，primary 場を頂点とする，無限の塔のような場の族をなす．これらは，Virasoro 代数の表現空間を張り，**共形族**といわれる．この塔の頂上付近の様子は，次のようになっている．

$$\begin{array}{c} \Phi \\ L_{-1}\Phi \\ L_{-1}^2\Phi \quad L_{-2}\Phi \\ L_{-1}^3\Phi \quad L_{-2}L_{-1}\Phi \quad L_{-3}\Phi \\ \cdots \end{array} \tag{3.62}$$

OPE (3.53) の後続項は，これら descendant 場により次のように展開される．

$$\begin{aligned} \Phi_2(z)\Phi_1(w) &= (z-w)^{h_3-h_1-h_2}\sum_{n=0}^{\infty}(z-w)^n A_n(w) \\ A_0(w) &= \Phi_3(w), \\ A_1(w) &= \beta_1 L_{-1}\Phi_3(w), \\ A_2(w) &= (\beta_{11}L_{-1}^2+\beta_2 L_{-2})\Phi_3(w). \end{aligned} \tag{3.63}$$

この係数 $\beta_1, \beta_{11}, \beta_2$ などは，Virasoro 代数の作用との整合性から順次決定される．その手続きは後で示す (3.6 節)．

ストレステンソル $T(z)$ 自身は，恒等作用素の descendant とみなすことができる．これを説明しよう．つねに定数 1 の値をとる場を**恒等作用素**といい，$\mathbf{1}$ で表す．$T(z)$ と $\mathbf{1}(w)$ との OPE は[4)]

$$T(z)\mathbf{1}(w) = \frac{0}{(z-w)^2}\mathbf{1}(w) + \frac{1}{z-w}\frac{\partial}{\partial w}\mathbf{1}(w) + L_{-2}\mathbf{1}(w) + O(z-w) + \cdots \tag{3.64}$$

と書き直すことができるので，$\mathbf{1}$ は $h=0$ の primary 場であって，その最初の descendant は自明 ($L_{-1}\mathbf{1} = \partial_w \mathbf{1} = 0$) となる．また，次の descendant は

$$L_{-2}\mathbf{1}(w) = T(w) \tag{3.65}$$

となって，ストレステンソルそのものであることがわかる．一般に，

$$L_{-n-2}\mathbf{1}(w) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^n T(w) \qquad (n \geq 0) \tag{3.66}$$

4) 点 w にある作用素の意味で $\mathbf{1}(w)$ と書いたが，w にはよらない．

である．こうして，恒等作用素 **1** に率いられる共形族は，次のような構造をしていることがわかる．

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ 0 \\ T \\ T' \\ (TT) \quad T'' \\ (T(TT)) \quad (TT') \quad T''' \\ \cdots \end{array} \tag{3.67}$$

ここで，記号 (AB) は，$A(z)$ と $B(w)$ の OPE の正則部分として

$$A(z)B(w) = (\text{特異部}) + (AB)(w) + O(z-w) \tag{3.68}$$

と定義される．この (AB) は自由場と限らない場に対して，正規積 $:AB:$ の代わりに用いられる．自由場の正規積と異って，一般には

$$(AB) \neq (BA)$$

であることに注意する．

3.5 descendant 場の変換と相関関数

Φ を共形重み h の primary 場とする．

$$T(z)\Phi(w) = \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w) + \frac{1}{z-w}\Phi'(w) + \cdots \tag{3.69}$$

Φ の descendant 場 $L_{-1}\Phi$, $L_{-2}\Phi$, $L_{-1}^2\Phi$ などは，一般に primary ではないので，その $T(z)$ との OPE も一般には複雑である．例えば $L_{-1}\Phi(w) = \Phi'(w)$ の場合は，(3.69) を w で微分して

$$T(z)\Phi'(w) = \frac{2h}{(z-w)^3}\Phi(w) + \frac{h+1}{(z-w)^2}\Phi'(w) + \frac{1}{z-w}\partial\Phi'(w) + \cdots \tag{3.70}$$

となるが，$h=0$ でない限り，この $(z-w)^{-3}$ の項のため primary 場ではない．次のレベル[5)]には 2 つの descendant 場 $L_{-1}^2\Phi = \Phi''$ と $L_{-2}\Phi$ がある．それら

5) $L_0\mathcal{O}(z) = (h+n)\mathcal{O}(z)$ となる $n = 0, 1, 2, \ldots$ を descendant $\mathcal{O}(z)$ のレベルという．

と $T(z)$ との OPE は，次のように計算される．

$$T(z)L_{-2}\Phi(w) = \frac{4h+c/2}{(z-w)^4}\Phi(w) + \frac{3}{(z-w)^3}L_{-1}\Phi(w) + \frac{h+2}{(z-w)^2}L_{-2}\Phi(w) + \frac{1}{z-w}L_{-1}L_{-2}\Phi(w) + \cdots, \tag{3.71}$$

$$T(z)L_{-1}^2\Phi(w) = \frac{6h}{(z-w)^4}\Phi(w) + \frac{2(2h+1)}{(z-w)^3}L_{-1}\Phi(w) + \frac{h+2}{(z-w)^2}L_{-1}^2\Phi(w) + \frac{1}{z-w}L_{-1}^3\Phi(w) + \cdots. \tag{3.72}$$

計算方法は次のとおりである．問題は各項の係数を決めるだけであるから，簡単のため $w=0$ とおく．また，L_n の作用のもとで Φ が重み h の最高重みベクトルであることから，$\Phi(0)$ を $|\,h\,\rangle$ と読み換える．そこで

$$\begin{aligned} T(z)L_{-2}\,|\,h\,\rangle &= \left(L_2\frac{1}{z^4} + L_1\frac{1}{z^3} + L_0\frac{1}{z^2} + \cdots\right)L_{-2}\,|\,h\,\rangle \\ &= \left(\frac{4h+c/2}{z^4} + \frac{3}{z^3}L_{-1} + \frac{h+2}{z^2}L_{-2} + \frac{1}{z}L_{-1}L_{-2}\right)|\,h\,\rangle \end{aligned} \tag{3.73}$$

のように計算して (3.71) が得られる．(3.72) は (3.70) を微分すればよい．

おもしろいのは，これらの descendant 場のうまい一次結合をとると primary 場をつくることができる，という点である．例えば

$$\chi(w) = L_{-1}^2\Phi(w) - tL_{-2}\Phi(w) \tag{3.74}$$

として，これが primary 場になることを要求すると

$$2(2h+1) - 3t = 0, \qquad 6h - \left(4h + \frac{c}{2}\right)t = 0, \tag{3.75}$$

すなわち

$$c = 13 - 6\left(t + \frac{1}{t}\right), \qquad h = \frac{3t-2}{4} \tag{3.76}$$

の場合に $\chi(w)$ は重み $h+2$ の primary 場になることがわかる．

同様に，レベル 3 には 3 つの descendant 場 $L_{-1}^3\Phi$, $L_{-2}L_{-1}\Phi$, $L_{-3}\Phi$ がある．例えば $L_{-2}L_{-1}\Phi$ の変換は，

$$
\begin{aligned}
&T(z)L_{-2}L_{-1}\Phi(w) \\
&= \frac{10h}{(z-w)^5}\Phi(w) + \frac{4(h+1)+c/2}{(z-w)^4}L_{-1}\Phi(w) \\
&\quad + \frac{3}{(z-w)^3}L_{-1}^2\Phi(w) + \frac{2h}{(z-w)^3}L_{-2}\Phi(w) \\
&\quad + \frac{h+3}{(z-w)^2}L_{-2}L_{-1}\Phi(w) + \frac{1}{z-w}L_{-1}L_{-2}L_{-1}\Phi(w) + \cdots
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

のように与えられる．

恒等作用素 **1** の descendant 場 (3.67) として，レベル 4 には (TT) および T'' の 2 つの場がある．前者は OPE

$$
T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}T'(w) + (TT)(w) + O(z-w) \tag{3.78}
$$

で定義され，その変換性は OPE

$$
\begin{aligned}
T(z)(TT)(w) = \frac{3c}{(z-w)^6} + \frac{c+8}{(z-w)^4}T(w) + \frac{3}{(z-w)^3}T'(w) \\
+ \frac{4}{(z-w)^4}(TT)(w) + \frac{1}{z-w}(TT)'(w) + \cdots
\end{aligned} \tag{3.79}
$$

により与えられる．Zamolodchikov にならって，場 $\Lambda(z)$ を

$$
\Lambda(z) = (TT)(z) - \frac{3}{10}T''(z) \tag{3.80}
$$

と定義すると

$$
T(z)\Lambda(w) = \frac{c+22/5}{(z-w)^4}\Lambda(w) + \frac{4}{z-w}\Lambda(w) + \frac{1}{z-w}\Lambda'(w) + \cdots \tag{3.81}
$$

となり，$c = -22/5$ の場合，Λ は重み 4 の primary 場として変換することがわかる．

descendant 場は primary 場に Virasoro 代数の作用を施して得られるものなので，その相関関数も primary 場の相関関数から Ward 恒等式 (3.35) により決められる．例えば

$$
L_n\Phi(z) = \oint_z \frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{n+1}T(w)\Phi(z) \tag{3.82}
$$

を含む相関関数は

$$
\begin{aligned}
&\langle L_n\Phi(z)\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_m(z_m)\rangle \\
&= \oint_z \frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{n+1}\langle T(w)\Phi(z)\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_m(z_m)\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \oint_z \frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{n+1} \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{h_i}{(w-z_i)^2} + \frac{1}{w-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i} \right] \langle \Phi(z)\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_m(z_m) \rangle$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \left[h_i(n+1)(z_i-z)^n + (z_i-z)^{n+1}\frac{\partial}{\partial z_i} \right] \langle \Phi(z)\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_m(z_m) \rangle \tag{3.83}$$

のように与えられる．最後の行への変形で，全留数が 0 であることを使った．

3.6 primary 場の V_h への作用

L_n との交換関係が

$$[L_n, \Phi(z)] = z^n \left(z\frac{\partial}{\partial z} + h(n+1) \right) \Phi(z) \tag{3.84}$$

で与えられる場の作用素 $\Phi(z)$ を (次元 h の) primary 場とよんだ．$\Phi(z)$ の作用素としての意味を明確にするため，どこからどこへの作用素かを指定して，その性質を考察しよう．ここでは $\Phi(z)$ の重みを h_2 とし，V_{h_1} から V_{h_3} への線形写像

$$\Phi_{h_2}(z) : \ V_{h_1} \to V_{h_3} \tag{3.85}$$

として，その作用の様子を具体的に調べる．そのために，行列要素

$$\langle u \,|\, \Phi_{h_2}(z) \,|\, v \rangle, \qquad \langle u \,| \in V_{h_3}^*, \qquad |\, v \rangle \in V_{h_1} \tag{3.86}$$

を調べよう．

$$\left(z\frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) \langle h_3 \,|\, \Phi_{h_2}(z) \,|\, h_1 \rangle$$
$$= \langle h_3 \,|\, [L_0, \Phi_{h_2}(z)] \,|\, h_1 \rangle = (h_3 - h_1) \langle h_3 \,|\, \Phi_{h_2}(z) \,|\, h_1 \rangle \tag{3.87}$$

より

$$\langle h_3 \,|\, \Phi_{h_2}(z) \,|\, h_1 \rangle = c z^{h_3 - h_1 - h_2} \tag{3.88}$$

がわかる．c は任意定数であるが，以下では $c=1$ と規格化する．任意の $\langle u \,| \in V_{h_3}^*$，$|\, v \rangle \in V_{h_1}$ に対しては，やはり交換関係より，

$$\langle u \,|\, L_n \Phi_{h_2}(z) \,|\, v \rangle = z^n \left(z\frac{\partial}{\partial z} + h_2(n+1) \right) \langle u \,|\, \Phi_{h_2}(z) \,|\, v \rangle$$
$$+ \langle u \,|\, \Phi_{h_2}(z) L_n \,|\, v \rangle \tag{3.89}$$

が成り立ち，これを $n>0$ については右向きに，$n<0$ については左向きに適

用すれば，最終的に式 (3.88) に帰着させることができる．したがって，行列要素 $\langle u | \Phi_{h_2}(z) | v \rangle$ は (規格化定数を除いて) 一意的に定まる．

期待値でなく，作用素 $\Phi_{h_2}(z) : V_{h_1} \to V_{h_3}$ そのものを決めたいときは，次のようにするのがより直接的である．

任意の $| v \rangle$ の像 $\Phi_{h_2} | v \rangle$ を決めることは，交換関係

$$\Phi_{h_2}(z) L_n | v \rangle = L_n \Phi_{h_2}(z) | v \rangle - z^n \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h_2(n+1) \right) \Phi_{h_2}(z) | v \rangle \tag{3.90}$$

$(n < 0)$ により，最高重みベクトル $| h_1 \rangle$ の像 $\Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle$ を求めることに帰着される．これを，次のようにおこう．

$$\Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} | h_3, n \rangle, \qquad | h_3, n \rangle \in V_{h_3}(n). \tag{3.91}$$

L_0 との交換関係より

$$L_0 \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle = \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle + \Phi_{h_2}(z) h_1 | h_1 \rangle \tag{3.92}$$

となるので，

$$z \frac{\partial}{\partial z} | h_3, n \rangle = (h_3 - h_1 - h_2 + n) | h_3, n \rangle \tag{3.93}$$

がわかる．これより $\Delta = h_3 - h_2 - h_1$ として

$$\begin{aligned} | h_3, 0 \rangle &= z^{\Delta} | h_3 \rangle, \\ | h_3, 1 \rangle &= z^{\Delta+1} \beta_1 L_{-1} | h_3 \rangle, \\ | h_3, 2 \rangle &= z^{\Delta+2} \left(\beta_2 L_{-2} | h_3 \rangle + \beta_{11} L_{-1}^2 | h_3 \rangle \right) \end{aligned} \tag{3.94}$$

などとおけることがわかる．ここでも，先頭の項の係数は 1 に規格化した．さらにこの係数 β を定めるために，$L_n | h_1 \rangle = 0$ $(n > 0)$ に注意して

$$L_n \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle = \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h_2(n+1) \right) \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle \tag{3.95}$$

を用いると，次の**降下公式**が得られる．

$$L_n | h_3, p \rangle = (p - n + h_3 + n h_2 - h_1) | h_3, p - n \rangle \tag{3.96}$$

L_n $(n>2)$ の関係式は $n=1,2$ の場合から得られるので，あとの 2 つの関係式を解けば十分である．はじめの数項について書き下すと，$n=p=1$ とすれば，β_1 を決める式

$$2h_3\beta_1 = (h_3 + h_2 - h_1) \tag{3.97}$$

を得る．$n=2$, $p=1,2$ とすれば，β_2, β_{11} を決める式は，

$$\begin{bmatrix} 4h_3 + \frac{c}{2} & 6h_3 \\ 6h_3 & (2h_3+1)4h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_3 + 2h_2 - h_1 \\ (1 + h_3 + h_2 - h_1)(h_3 + h_2 - h_1) \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

となる．これらの左辺の行列は (3.20), (3.21) にほかならない．その行列式には Kac による美しい公式 (3.182) 6)が知られており，V_h の構造を調べる上で基本的である．

Belavin, Polyakov, Zamolodchikov は，Kac 行列式が 0 になる場合にきわめて興味深いことが起こることを発見した．以下で，この場合を考察する．

3.7 特異ベクトルと退化した表現

表現 V_h のベクトル $|\chi\rangle$ は

$$L_n|\chi\rangle = 0 \qquad (n>0) \tag{3.99}$$

を満たすとき**特異ベクトル**という．V_h を生成する最高重みベクトル $|h\rangle$ 自身は自明な特異ベクトルである．これ以外に特異ベクトルがあるかどうかは，表現 V_h の構造を知る上で基本的な問題である．これに関して，次の結果が知られている．

$t\neq 0$ を複素数，r,s を $rs>0$ なる整数とする．表現 V_h は

$$\begin{aligned} c &= 13 - 6\left(t + \frac{1}{t}\right), \\ h = h_{r,s} &= \frac{(rt-s)^2 - (t-1)^2}{4t} \end{aligned} \tag{3.100}$$

6) Kac 行列式公式は，V.G. Kac, "Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras", Lect. Notes in Phys. **94** (1979) 441–445 でアナウンスされ，証明は B.L. Feigin and D.B. Fuchs, "Skew-Symmetric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra", Funct. Anal. and Appl. **16** (1982), 47–63 に与えられた．

のとき，レベル $n = rs$ に特異ベクトル $\left|\chi_{r,s}\right\rangle$ をもち，スカラー倍を除いて一意的である．

この証明は，後に自由場表示を用いて行なう (3.11 節)．ここでは例を示しておく．

- $n = 1$, $h_{1,1} = 0$ に対して

$$\left|\chi_{1,1}\right\rangle = L_{-1}\left|h_{1,1}\right\rangle. \tag{3.101}$$

- $n = 2$, $h_{2,1} = \dfrac{3t-2}{4}$, $h_{1,2} = \dfrac{3-2t}{4t}$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\chi_{2,1}\right\rangle &= \left(L_{-1}^2 - tL_{-2}\right)\left|h_{2,1}\right\rangle,\\ \left|\chi_{1,2}\right\rangle &= \left(L_{-1}^2 - \frac{1}{t}L_{-2}\right)\left|h_{1,2}\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.102}$$

- $n = 3$, $h_{3,1} = 2t-1$, $h_{1,3} = \dfrac{2-t}{t}$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\chi_{3,1}\right\rangle &= \left(L_{-1}^3 - 4tL_{-2}L_{-1} + 2t(2t-1)L_{-3}\right)\left|h_{3,1}\right\rangle,\\ \left|\chi_{1,3}\right\rangle &= \left(L_{-1}^3 - \frac{4}{t}L_{-2}L_{-1} - \frac{2(t-2)}{t^2}L_{-3}\right)\left|h_{1,3}\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.103}$$

Virasoro 代数の表現 V_h に (3.99) を満たす特異ベクトル $\left|\chi\right\rangle$ があるときは，$\left|\chi\right\rangle$ から生成される部分表現で割らないと既約表現にならない．「割る」とは，$\left|\chi\right\rangle$ から生成されるベクトルをすべて 0 とみなすという意味である．

すでに 3.6 節でみたように，descendant 場は一般に primary 場として変換しないが，特別な場合に primary 場として振る舞うことがある．このような場を **null 場**とよぶ (null はドイツ語で 0 の意味)．primary 場 $\Phi_h(z)$ より生成される Virasoro 代数の表現でいえば，その特異ベクトルが null 場にほかならない[7]．上で述べたことにより，表現の既約性を仮定すると，null 場を含む相関関数が 0 となることが要請される．null 場の共形変換に対する変換性より，それを 0 とおくことは共形不変性を壊さないことに注意しよう．次節にみるように，この要請は相関関数をほぼ決定してしまうほど強力である．BPZ が注目したのは，まさにこの点であった．

$h = 0$ の恒等作用素 $\mathbf{1}$ が $\left|\chi_{1,1}\right\rangle$ 以外の null 場をもつためには，(3.100) より，$t = q/p$ (q, p は互いに素な正整数) であることが必要十分である．この場合，対応する c, $h_{r,s}$ の式は

7) 以下 null 場と特異ベクトルを同義語のように扱う．

$$
\begin{aligned}
c &= 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}, \\
h = h_{r,s} &= \frac{(rq-sp)^2-(q-p)^2}{4pq}
\end{aligned} \tag{3.104}
$$

である．BPZ において詳しく調べられたのはこの場合である．詳細は次節以降にゆずり，結果を先に述べておこう．彼らが発見したことは，$h = h_{r,s}$ ($1 \le r \le p-1,\ 1 \le s \le q-1$) を満たす整数 r, s に対応する primary 場が閉じた OPE をなし，それらの相関関数は線形微分方程式 (確定特異点型) によって完全に決まるということである．これらの場を $\Phi_{r,s}$ と書く．重みの関係

$$
h_{p-r,q-s} = h_{r,s} \tag{3.105}
$$

より，

$$
\Phi_{p-r,q-s} = \Phi_{r,s} \tag{3.106}
$$

と同一視され，全部で $(p-1)(q-1)/2$ 個の primary 場により閉じた理論ができ上がる．これを BPZ の**ミニマル模型**とよぶ．これらの模型は Ising 模型をはじめとする，種々の 2 次元統計系に適用され，その臨界指数を系統的に説明するなどの画期的成功を収めた．

例をいくつかみておこう．

- $(p,q) = (3,4)$ の場合 $c = \frac{1}{2}$ であり，primary 場の次元は

	$r=1$	$r=2$
$s=3$	$\frac{1}{2}$	0
$s=2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$s=1$	0	$\frac{1}{2}$

(3.107)

となる．これは **Ising 模型**に対応する．なお，Ising 模型については，7.5 節で概略を紹介する．

- $(p,q) = (4,5)$ の場合 $c = \frac{7}{10}$ であり，primary 場の次元は

	$r=1$	$r=2$	$r=3$
$s=4$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{16}$	0
$s=3$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{1}{10}$
$s=2$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{3}{5}$
$s=1$	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{2}$

(3.108)

となる．これは Ising 模型に空孔を許した模型の三重臨界点を記述する．

• $(p,q)=(5,6)$ の場合 $c=\frac{4}{5}$ であり，対応する統計系としては，3 状態 Potts 模型が知られている．

本節の最後として，ミニマル表現の指標について簡単に述べておこう．共形次元 h の最高重みベクトルから生成される Virasoro 代数の表現 V_h において，その重み $L_0=h+n$ $(n\in\mathbf{Z})$ の成分の次元は分割数 $p(n)$ で与えられた．これより，表現 V_h の指標

$$\mathrm{tr}_{V_h}(q^{L_0})=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^{h+n}=q^h\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1} \tag{3.109}$$

を得る．ここに，tr_{V_h} は表現空間 V_h におけるトレースを表す．ミニマル模型の場合には，c,h が特別な値であり V_h が可約になる．その既約成分の指標を求めよう．

$$c=1-6\frac{(p-q)^2}{pq},\qquad h=h_{r,s}=\frac{(rq-sp)^2-(p-q)^2}{4pq} \tag{3.110}$$

の場合を考える[8]．表現 $V_{h_{r,s}}$ は，$r,s>0$ のときレベル rs に特異ベクトルをもつが，それより生成される部分表現は $h_{r,s}+rs=h_{-r,s}$ に注意すれば $V_{h_{-r,s}}$ と同型である．すなわち，$V_{h_{r,s}}$ は $V_{h_{-r,s}}$ を部分表現として含む．また，$h_{r,s}=h_{-r,-s}=h_{r+p,s+q}$ より，$V_{h_{r,s}}=V_{h_{p-r,q-s}}$ は $V_{h_{2p-r,s}}=V_{h_{-p+r,q-s}}$ も部分表現として含む．つまり，$V_{h_{r,s}}$ は二つの部分表現 $V_{h_{-r,s}}$, $V_{h_{2p-r,s}}$ を含んでいる．さらに，それぞれの部分表現は，また二つの部分表現を含み … というぐあいに，$V_{h_{r,s}}$ の部分表現の入れ子の関係は重層的に続く．その構造を詳細に調べると，次の図式が得られる[9]．($k\to l$ は $V_{h_{k,s}}\supset V_{h_{l,s}}$ の意味．)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & -r & \to & -2p+r & \to & -2p-r & \to & -4p+r & \to & -4p-r\ \cdots \\ r & \begin{array}{c}\nearrow\\ \searrow\end{array} & & \times & & \times & & \times & & \times & \\ & & 2p-r & \to & 2p+r & \to & 4p-r & \to & 4p+r & \to & 6p-r\ \cdots \end{array} \tag{3.111}$$

この構造より，既約表現の指標 $\chi^{\mathrm{Vir}}_{r,s}=\mathrm{tr}(q^{L_0-\frac{c}{24}})$ が次で与えられる[10]．

8) 指標の q^{L_0} と記号 q が重なるが混乱はしないであろう．

9) 表現 $V_{h_{r,s}}$ の構造の分析には Jantzen filtration が有効に用いられる．基本文献は，B. L. Feigin and D.B. Fuchs, Verma modules over the Virasoro algebra, Funkts. Anal. Priozhen., **17** (1983) 91–92.

10) 因子 $q^{-\frac{c}{24}}$ は後の便宜のためにつけた (6.3 節参照)．

$$\chi^{\mathrm{Vir}}_{r,s} = q^{-\frac{c}{24}} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^n)^{-1} \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} q^{h_{2kp+r,s}} - \sum_{k\in\mathbf{Z}} q^{h_{2kp-r,s}} \right) \tag{3.112}$$

例えば $(p,q)=(2,3)$ で $(r,s)=(1,1)$ の場合，$c=h=0$ より自明な表現を得るはずであるが，Euler の**五角数定理**

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} \tag{3.113}$$

により，たしかに指標は $\chi^{\mathrm{Vir}}_{1,1}=1$ である．

また，$(p,q)=(3,4)$ の場合は，$c=1/2$ で，$h_{1,1}=0$, $h_{1,2}=1/16$, $h_{2,1}=1/2$ であった．これらの表現は，自由 fermion により実現されたものである (2.5 節)．Virasoro 作用素 L_n は fermion の 2 次式なので，fermion の数の偶奇を保って作用する．そこで，NS および Ramond の各 Fock 空間を，fermion 数の偶奇によって分解したものが $c=1/2$ の Virasoro 既約表現を与える．その指標は，偶奇に分解した fermion Fock 空間の指標を用いて

$$\begin{aligned}\chi^{\mathrm{Vir}}_{1,1} \pm \chi^{\mathrm{Vir}}_{2,1} &= q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 \pm q^{n-1/2}), \\ \chi^{\mathrm{Vir}}_{1,2} &= q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)\end{aligned} \tag{3.114}$$

と表すことができる．

3.8 相関関数の微分方程式

本節では，N 個の primary 場の挿入された相関関数 (N **点関数**という)

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \left\langle \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_1(z_1) \right\rangle \\ &= \left\langle 0 \,\middle|\, \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_1(z_1) \,\middle|\, 0 \right\rangle\end{aligned} \tag{3.115}$$

を考え，特異ベクトルの存在する状況において，相関関数の従う微分方程式を導く．この微分方程式が BPZ 理論の核心である．

議論の前振りとして，相関関数の $SL(2,\mathbf{C})$ 不変性について述べておこう．相関関数の定義 (3.115) において，$\left|0\right\rangle$ は $L_n\left|0\right\rangle = 0$ $(n\geq 0)$ を満たす $h=0$ の最高重みベクトルであるが，$L_{-1}\left|0\right\rangle$ が特異ベクトルとなるため (既約表現

で考える限り)，$L_n \left| 0 \right\rangle = 0$ $(n \geq -1)$ である．同様に，$\left\langle 0 \right| L_n = 0$ $(n \leq 1)$ が成り立っている．とくに L_{-1}, L_0, L_1 (これらは Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ を生成する) は $\left\langle 0 \right|$ でも $\left| 0 \right\rangle$ でも 0 作用になり，このことから，相関関数の基本的性質として，$\mathfrak{sl}_2$ 不変性

$$\sum_{i=1}^{N} {z_i}^n \left[z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + h_i(n+1) \right] \Psi(z) = 0 \qquad (n = 0, \pm 1) \tag{3.116}$$

が得られる．このことは，形式 $\Psi(z_N, \ldots, z_1) dz_N^{h_N} \cdots dz_1^{h_1}$ が，一次分数変換

$$z_i \mapsto \frac{az_i + b}{cz_i + d} \qquad (ad - bc = 1)$$

で不変であるともいい換えられ，これを $\boldsymbol{SL}(2, \mathbf{C})$ **不変性**という．

この $SL(2, \mathbf{C})$ 不変性により，$N = 1, 2, 3$ の場合には相関関数の z_i 依存性が完全に決まり

$$\begin{aligned}
&\left\langle \Phi_1(z_1) \right\rangle = C_1 \delta_{h_1, 0}, \\
&\left\langle \Phi_2(z_2) \Phi_1(z_1) \right\rangle = \frac{C_{21}}{z_{21}^{2h_1}} \delta_{h_1, h_2}, \\
&\left\langle \Phi_3(z_3) \Phi_2(z_2) \Phi_1(z_1) \right\rangle = \frac{C_{321}}{z_{21}^{h_1+h_2-h_3} z_{31}^{h_1+h_3-h_2} z_{32}^{h_2+h_3-h_1}}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

となる $(z_{ij} = z_i - z_j)$．ここに C_{ijk} 等は定数である．こうして，3 点関数までは，$SL(2, \mathbf{C})$ 不変性だけから相関関数の座標依存性が決まってしまう．このことは，$SL(2, \mathbf{C})$ 変換により，Riemann 球面 $\mathbf{P}^1$ 上の任意の 3 点 z_1, z_2, z_3 を任意の値に変換できることの帰結でもある．例えば，係数 C_{321} は，$(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$ の場合を考えて，

$$\begin{aligned}
C_{321} &= \lim_{z_3 \to \infty} {z_3}^{2h_3} \left\langle \Phi_3(z_3) \Phi_2(1) \Phi_1(0) \right\rangle \\
&= \left\langle h_3 \middle| \Phi_2(1) \middle| h_1 \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.118}$$

のように決められる．

しかし，N が 4 以上の場合には，$SL(2, \mathbf{C})$ 不変性だけからは相関関数の z_i 依存性が完全には決まらない．例えば $N = 4$ の場合には，

$$\begin{aligned}
f(z_3) &= \lim_{z_4 \to \infty} {z_4}^{2h_4} \left\langle \Phi_4(z_4) \Phi_3(z_3) \Phi_2(1) \Phi_1(0) \right\rangle \\
&= \lim_{z_4 \to \infty} {z_4}^{2h_4} \left\langle h_4 \middle| \Phi_3(z_3) \Phi_2(1) \middle| h_1 \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.119}$$

とおけば

$$\langle\Phi_4(z_4)\Phi_3(z_3)\Phi_2(z_2)\Phi_1(z_1)\rangle$$
$$= z_{21}^{h_4-h_1-h_2-h_3} z_{41}^{h_2+h_3-h_1-h_4} z_{42}^{h_1+h_3-h_2-h_4} z_{43}^{-2h_3} f(x), \quad (3.120)$$

ここに x は $z_1,\ldots,z_4$ の**複比**

$$x = \frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{34}} \quad (3.121)$$

である．すなわち，1 変数関数 $f(x)$ の自由度が (一般の N 点関数では，$N-3$ 変数の関数の自由度が) 不定となる．不定に残った関数 $f(x)$ を決めるには，$SL(2,\mathbf{C})$ 不変性だけでは情報が足りないのである．以上は BPZ 以前によく知られていた． (前振り終わり)

そこで BPZ の登場となるわけである．彼らの発見は，$SL(2,\mathbf{C})$ を含む無限次元の対称性 (すなわち Virasoro 代数)，およびその表現に現われる特異ベクトルが，不定に残った関数 $f(x)$ の決定に対して本質的な情報をもたらすということにあった．例えば

$$\Psi(z) = \langle\Phi_N(z_N)\cdots\Phi_1(z_1)\rangle \quad (3.122)$$

において，$\Phi_1(z_1)$ の次元が $h_1 = h_{2,1} = (3t-2)/4$ であって，特異ベクトル

$$\chi_{2,1}(z_1) = (L_{-1}^2 - tL_{-2})\Phi_{h_1}(z_1) \quad (3.123)$$

をもつとする．場 $\chi(z)$ は primary 場として変換するので，共形不変性を壊すことなく

$$\langle\Phi_N(z_N)\cdots\Phi_2(z_2)\chi_{2,1}(z_1)\rangle = 0 \quad (3.124)$$

という条件を課すことができる[11]．この条件を，$L_{-1}^2\Phi_{h_1}(z) = \Phi''_{h_1}(z)$ および (3.83) を用いて primary 場の相関関数で表すと

$$\left[\frac{1}{t}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \sum_{i=2}^{N}\left(\frac{h_i}{(z_1-z_i)^2} + \frac{1}{z_1-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\right]\Psi(z) = 0 \quad (3.125)$$

という微分方程式を得る．一般の特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ の場合も，形は複雑になるが事情は同様であって，特異ベクトル (= null 場) の存在は primary 場の相関関数についての微分方程式を導くのである．次節で，この方程式の局所的性質を調べる．大域的性質は 5.9，5.10 節で扱う．

11) 既約表現であることを要求すれば必須の条件である．

3.9 合 成 則

前節で導いた微分方程式 (3.125) の特異性を調べてみよう．そのために，$z_{12} = z_1 - z_2 = 0$ の近くでの解の展開

$$\Psi(z) = z_{12}^a\Big(\psi_0(z_2,\ldots,z_N) + z_{12}\psi_1(z_2,\ldots,z_N) + \cdots\Big) \tag{3.126}$$

を仮定して，(3.125) の z_{12}^{a-2} の係数を比較すると，指数の方程式

$$3a^2 - a + 4ah_1 - 2h_2 - 4h_1h_2 = 0 \tag{3.127}$$

が得られる．$h_1 = h_{2,1} = (3t-2)/4$，および，$h_2 = h_{r,s} = \big\{(rt-s)^2 - (t-1)^2\big\}/(4t)$ とおくと

$$a = \frac{1 - t \pm (rt-s)}{2} \tag{3.128}$$

がわかる．これと OPE の関係

$$\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2) = z_{12}^{h-h_1-h_2}\Phi_h(z_2) + \cdots \tag{3.129}$$

を比較すると

$$h = h_1 + h_2 + a = h_{r\pm1,s} \tag{3.130}$$

が得られる．すなわち，次元 $h_{2,1}$ および $h_{r,s}$ の primary 場の OPE に現れる primary 場は，次元 $h_{r+1,s}$ または $h_{r-1,s}$ をもつことがわかった．この結果を

$$[2,1]\otimes[r,s] = [r+1,s]\oplus[r-1,s] \tag{3.131}$$

と表し，**合成則** (fusion 則) とよぶ．BPZ は同様の考察により，(p,q) ミニマル模型の合成則を次のように与えた．

$$[r_1,s_1]\otimes[r_2,s_2] = \bigoplus_{r_3,s_3}[r_3,s_3], \tag{3.132}$$

ただし，r_3, s_3 は $r_1+r_2+r_3$, $s_1+s_2+s_3$ ともに奇数で

$$\begin{aligned} &|r_1-r_2|+1 \le r_3 \le \min(r_1+r_2-1, 2p-1-r_1-r_2),\\ &|s_1-s_2|+1 \le s_3 \le \min(s_1+s_2-1, 2q-1-s_1-s_2) \end{aligned} \tag{3.133}$$

を満たす[12]．作用素の言葉でいえば，(3.133) が満たされるときに限って非自明な OPE

$$\Phi_{r_1,s_1}(z)\Phi_{r_2,s_2}(w) = (z-w)^{h_{r_3,s_3}-h_{r_1,s_1}-h_{r_2,s_2}}\Phi_{r_3,s_3}(w) + \cdots \tag{3.134}$$

---

12) この不等式は，(r_1-1, r_2-1, r_3-1) についての三角不等式および $r_1+r_2+r_3 \le 2p-1$ と等価であるから，r_1, r_2, r_3 について対称的 (s_i も同様) である．

が存在することを意味する.

例として, $c=\frac{1}{2}$ の Ising 模型を考察しよう. この理論には, 3 つの primary 場

$$\mathbf{1}: \left(h=0\right), \quad \sigma: \left(h=\frac{1}{16}\right), \quad \psi: \left(h=\frac{1}{2}\right) \tag{3.135}$$

が存在し, 作用素積の下で閉じた代数をなす. その合成則は

$$[\sigma][\sigma]=[\mathbf{1}]\oplus[\psi], \qquad [\psi][\sigma]=[\sigma], \qquad [\psi][\psi]=[\mathbf{1}] \tag{3.136}$$

で与えられる. 合成則 $[\psi][\psi]=[\mathbf{1}]$ は自由 fermion の OPE

$$\psi(z)\psi(w)=\frac{1}{z-w}+:\psi(z)\psi(w): \tag{3.137}$$

に対応する. また $[\psi][\sigma]=[\sigma]$ は $\psi(z)$ の Ramond 真空への作用 (または OPE)

$$\begin{aligned}&\psi(z)\,|\,\sigma\,\rangle=z^{-1/2}\Big(\psi_0\,|\,\sigma\,\rangle+z\psi_{-1}\,|\,\sigma\,\rangle+\cdots\Big),\\ &\psi(z)\sigma(w)=(z-w)^{-1/2}\Big(\psi_0\sigma(w)+(z-w)\psi_{-1}\sigma(w)+\cdots\Big)\end{aligned} \tag{3.138}$$

に対応する. 非自明なのは $[\sigma][\sigma]=[\mathbf{1}]\oplus[\psi]$ である. 降下公式 (3.96) の方法で対応する OPE を具体的に調べると

$$\begin{aligned}\sigma(z)\,|\,\sigma\,\rangle=z^{-\frac{1}{8}}\Big[\,\mathbf{1}&+\frac{z^2}{8}\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}+\frac{z^3}{8}\psi_{-\frac{5}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}\\ &+\frac{z^4}{128}(3\psi_{-\frac{5}{2}}\psi_{-\frac{3}{2}}+15\psi_{-\frac{7}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}})+\cdots\Big]\,|\,0\,\rangle,\end{aligned} \tag{3.139}$$

および

$$\begin{aligned}\sigma(z)\,|\,\sigma\,\rangle=z^{\frac{3}{8}}\Big[\,\psi_{-\frac{1}{2}}&+\frac{z}{2}\psi_{-\frac{3}{2}}+\frac{3z^2}{8}\psi_{-\frac{5}{2}}+\frac{5z^4}{16}\psi_{-\frac{7}{2}}\\ &+\frac{z^5}{128}(35\psi_{-\frac{9}{2}}+\psi_{-\frac{5}{2}}\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}})+\cdots\Big]\,|\,0\,\rangle\end{aligned} \tag{3.140}$$

である[13]. 前者が $[\sigma][\sigma]=[\mathbf{1}]$, 後者が $[\sigma][\sigma]=[\psi]$ に対応する.

Ising 模型は自由 fermion の理論 (相互作用のない自明な理論) と等価であるにもかかわらず, 非自明なスピン相互作用を記述している. それが可能な理由は, fermion 場とスピン場およびスピン場どうしの多価性 (非局所性) による. 名前のもとである 2 次元統計系としての Ising 模型とそこにおける fermion の由来については 7.5 節で議論する. (例終わり)

13) 相関関数 $\langle\,\sigma\,|\,\psi(z_1)\cdots\psi(z_n)\,|\,\sigma\,\rangle$ から計算することもできる.

合成則は，null 場を 0 とする条件から (微分方程式を経由せず) 直接導くことができる．そのための基本となるのは，特異ベクトルを含む 3 点関数の公式

$$\left\langle h_{r_1,s_1} \middle| \Phi_{h_2}(z) \middle| \chi_{r_3,s_3} \right\rangle = \prod_{i=1}^{r_3}\prod_{j=1}^{s_3}(h_2 - h_{r_1+r_2-2i+1,s_1+s_3-2j+1}) z^{h_1-h_2-h_3-rs} \tag{3.141}$$

である．ここに $\left|\chi_{r_3,s_3}\right\rangle$ は $\left|h_{r_3,s_3}\right\rangle$ のレベル $N = r_3 s_3$ の特異ベクトル

$$\left|\chi_{r_3,s_3}\right\rangle = \left(L_{-1}^N + \cdots\right)\left|h_{r_3,s_3}\right\rangle \tag{3.142}$$

である．公式 (3.141) の意味は次のとおりである．primary 場の 3 点関数

$$\left\langle h_1 \middle| \Phi_{h_2}(z) \middle| h_3 \right\rangle = z^{\Delta}, \qquad \Delta = h_1 - h_2 - h_3 \tag{3.143}$$

より，descendant 場を含む 3 点関数は

$$\begin{aligned}
&\left\langle h_1 \middle| \Phi_{h_2} L_{-n_k}\cdots L_{-n_1} \middle| h_3 \right\rangle \\
&= z^{-n_k}\left(-z\frac{\partial}{\partial z} + h_2(n_k-1)\right)\cdots z^{-n_1}\left(-z\frac{\partial}{\partial z} + h_2(n_1-1)\right) z^{\Delta} \\
&= z^{\Delta-(n_1+\cdots+n_k)}\prod_{i=1}^{k}\left(-\Delta + \sum_{j=1}^{i-1} n_j + h_2(n_i-1)\right) \\
&= z^{\Delta-(n_1+\cdots+n_k)}\prod_{i=1}^{k}\left(n_i h_2 + h_3 - h_1 + \sum_{j=1}^{i-1} n_j\right)
\end{aligned} \tag{3.144}$$

のように計算される．そこで，

$$\left\langle h_{r_1,s_1} \middle| \Phi_{h_2}(z) \middle| \chi_{r_3,s_3} \right\rangle = P(h_2) z^{h_1-h_2-h_3-r_3 s_3} \tag{3.145}$$

とすれば，$P(h_2)$ は h_2 について $N = r_3 s_3$ 次多項式である．この多項式が，N 個の因子に綺麗に因数分解される，というのが，公式 (3.141) の主張である．簡単な場合として，$h_1 = h_{r_1,s_1} = \left\{(r_1 t - s_1)^2 - (t-1)^2\right\}/(4t)$，$h_3 = h_{2,1} = (3t-2)/4$ の場合を試してみると，

$$\begin{aligned}
&\left\langle h_1 \middle| \Phi_{h_2}(z) \middle| \chi_{2,1} \right\rangle \\
&= \left\langle h_1 \middle| \Phi_{h_2}(z)\left(L_{-1}^2 - tL_{-2}\right) \middle| h_3 \right\rangle \\
&= \left[(-h_1 + h_2 + h_3)(1 - h_1 + h_2 + h_3) - t(-h_1 + 2h_2 + h_3)\right] z^{\Delta-2} \\
&= (h_2 - h_{r+1,s})(h_2 - h_{r-1,s}) z^{\Delta-2}
\end{aligned} \tag{3.146}$$

となり，たしかに成立している．

公式 (3.141) は，V_{h_3} に特異ベクトルがある場合に，3 点関数 $\langle h_1 | \Phi_{h_2}(z) | h_3 \rangle$ が非自明に存在するような h_2 の値を教える (ミニマル表現のように特異ベクトルが複数あるときは，そのすべてについて条件が課される)．さらに，V_{h_1} に特異ベクトルがある場合も同様の条件が課される．こうして得られる h_2 に関するすべての条件から合成則 (3.132) が従う．

ここまで，特異ベクトルの存在やその帰結としての合成則を，低いレベルについて具体的計算で確かめてきた．これらの一般的証明は，以下の節で述べる自由場表示によるのが簡明である．自由場表示によると，相関関数も積分の形で具体的に与えられる．

3.10 自由場表示

自由 boson 場

$$\varphi(z)\varphi(w) = \log(z-w) + \cdots \tag{3.147}$$

を考える．これより (2.39) のように[14)]

$$T(z) = \frac{1}{2} : \partial\varphi(z)^2 : + \rho\partial^2\varphi(z), \tag{3.148}$$

すなわち

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbf{Z}} : a_m a_{n-m} : -(n+1)\rho a_n \tag{3.149}$$

とすると

$$c = 1 - 12\rho^2 \tag{3.150}$$

の Virasoro 代数が得られることは，すでに知っている．また，boson 場の表現空間 H_α は，

$$a_n | \alpha \rangle = 0 \quad (n>0), \qquad a_0 | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle \tag{3.151}$$

を満たすベクトル $|\alpha\rangle$ に，a_n $(n<0)$ を作用させて得られるベクトル全体として定義された (2.4 節)．L_n の作用に関して $|\alpha\rangle$ は

$$L_n | \alpha \rangle = 0 \quad (n>0), \qquad L_0 | \alpha \rangle = h(\alpha) | \alpha \rangle \tag{3.152}$$

14) ここでは T_ρ, $L_n^{(\rho)}$ の ρ を省く．

をみたす最高重みベクトルとなる．ここに最高重み $h(\alpha)$ は

$$h(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \rho\alpha \tag{3.153}$$

で与えられる．

基本的な問題は，この空間 H_α の Virasoro の表現空間としての構造を調べることである[15)]．そのためには，$|\,\alpha\,\rangle$ に a_n $(n<0)$ を作用させて得られるベクトルたちと，$|\,\alpha\,\rangle$ に L_n $(n<0)$ を作用させて得られるベクトルたちの関係 (ペアリング) の計算が鍵となる．具体例の計算からはじめよう．

式 (3.149) により，L_n は a_n で表されているので，L_n の $|\,\alpha\,\rangle$ への作用は容易に計算される．すなわち

$$\begin{aligned} L_{-n}\,|\,\alpha\,\rangle &= \left(\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} a_{-m}a_{-n+m} + (n-1)\rho a_{-n}\right)\,|\,\alpha\,\rangle, \\ [L_n, a_m] &= -ma_{n+m} - \rho(n+1)n\delta_{m+n,0} \end{aligned} \tag{3.154}$$

を用いて

$$C_1 = \langle\,\alpha\,|\,a_1L_{-1}\,|\,\alpha\,\rangle = \alpha,$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \langle\,\alpha\,|\,a_1^2L_{-1}^2\,|\,\alpha\,\rangle & \langle\,\alpha\,|\,a_2L_{-1}^2\,|\,\alpha\,\rangle \\ \langle\,\alpha\,|\,a_1^2L_{-2}\,|\,\alpha\,\rangle & \langle\,\alpha\,|\,a_2L_{-2}\,|\,\alpha\,\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha^2 & 2\alpha \\ 1 & 2(\alpha+\rho) \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} \langle\,\alpha\,|\,a_1^3L_{-1}^3\,|\,\alpha\,\rangle & \langle\,\alpha\,|\,a_1a_2L_{-1}^3\,|\,\alpha\,\rangle & \langle\,\alpha\,|\,a_3L_{-1}^3\,|\,\alpha\,\rangle \\ \langle\,\alpha\,|\,a_1^3L_{-2}L_{-1}\,|\,\alpha\,\rangle & \langle\,\alpha\,|\,a_1a_2L_{-2}L_{-1}\,|\,\alpha\,\rangle & \langle\,\alpha\,|\,a_3L_{-2}L_{-1}\,|\,\alpha\,\rangle \\ \langle\,\alpha\,|\,a_1^3L_{-3}\,|\,\alpha\,\rangle & \langle\,\alpha\,|\,a_1a_2L_{-3}\,|\,\alpha\,\rangle & \langle\,\alpha\,|\,a_3L_{-3}\,|\,\alpha\,\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\alpha^3 & 6\alpha^2 & 6\alpha \\ 3\alpha & 2(\alpha+\rho)\alpha & 3\alpha \\ 0 & 2 & 3(\alpha+2\rho) \end{bmatrix} \tag{3.155}$$

---

15) boson Fock 空間 H_α の Virasoro 表現としての構造の詳細は，遮蔽作用素を用いて Fock 表現の複体を構成することにより調べられた．G.Felder, “BRST approach to minimal models”, Nucl. Phys. **B317** (1989) 215–236. これは，BGG 分解の無限次元版と考えられる．

などが得られる．ここに現れた行列の行列式を $d_n = \det(C_n)$ とすると，

$$\begin{aligned} d_1 &= \alpha = (\alpha - \alpha_{1,1}), \\ d_2 &= 4\alpha\left(\alpha^2 + \rho\alpha - \frac{1}{2}\right) = 4(\alpha - \alpha_{1,1})(\alpha - \alpha_{2,1})(\alpha - \alpha_{1,2}), \\ d_3 &= 36\alpha^2\left(\alpha^2 + \rho\alpha - \frac{1}{2}\right)(\alpha^2 + 2\rho\alpha - 2) \\ &= 36(\alpha - \alpha_{1,1})^2(\alpha - \alpha_{2,1})(\alpha - \alpha_{1,2})(\alpha - \alpha_{3,1})(\alpha - \alpha_{1,3}) \end{aligned} \tag{3.156}$$

が成り立つ．ここで

$$\rho = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta}, \qquad \alpha_{r,s} = \frac{1-r}{2}\beta + \frac{s-1}{\beta} \tag{3.157}$$

とおいた．

同様にして，

$$\begin{aligned} C_1^* &= \langle \alpha \,|\, L_1 a_{-1} \,|\, \alpha \rangle = \alpha - 2\rho, \\ C_2^* &= \begin{bmatrix} \langle \alpha \,|\, L_1^2 a_{-1}^2 \,|\, \alpha \rangle & \langle \alpha \,|\, L_2 a_{-1}^2 \,|\, \alpha \rangle \\ \langle \alpha \,|\, L_1^2 a_{-2} \,|\, \alpha \rangle & \langle \alpha \,|\, L_2 a_{-2} \,|\, \alpha \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(\alpha - 2\rho)^2 & 1 \\ 2(\alpha - 2\rho) & 2(\alpha - 3\rho) \end{bmatrix}, \\ C_3^* &= \begin{bmatrix} \langle \alpha \,|\, L_1^3 a_{-1}^3 \,|\, \alpha \rangle & \langle \alpha \,|\, L_1 L_2 a_{-1}^3 \,|\, \alpha \rangle & \langle \alpha \,|\, L_3 a_{-1}^3 \,|\, \alpha \rangle \\ \langle \alpha \,|\, L_1^3 a_{-2} a_{-1} \,|\, \alpha \rangle & \langle \alpha \,|\, L_1 L_2 a_{-2} a_{-1} \,|\, \alpha \rangle & \langle \alpha \,|\, L_3 a_{-2} a_{-1} \,|\, \alpha \rangle \\ \langle \alpha \,|\, L_1^3 a_{-3} \,|\, \alpha \rangle & \langle \alpha \,|\, L_1 L_2 a_{-3} \,|\, \alpha \rangle & \langle \alpha \,|\, L_3 a_{-3} \,|\, \alpha \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6(\alpha - 2\rho)^3 & 3(\alpha - 2\rho) & 0 \\ 6(\alpha - 2\rho)^2 & 2(\alpha - 3\rho)(\alpha - 2\rho) & 2 \\ 6(\alpha - 2\rho) & 3(\alpha - 2\rho) & 3(\alpha - 4\rho) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.158}$$

が成り立つ．これらはあらためて計算しなくても，積の順序を逆転する変換

$$\sigma(a_n) = a_{-n} - 2\rho\delta_{n,0}, \quad \sigma(\rho) = -\rho, \quad \sigma(L_n) = L_{-n} \tag{3.159}$$

を施すことにより，C_n からただちに得られる．すなわち，

$$C_n^*(\alpha, \rho) = C_n(\alpha - 2\rho, -\rho)^t. \tag{3.160}$$

一般に,

$$d_n = \det(C_n) = (\text{定数}) \prod_{r,s\geq 1} (\alpha - \alpha_{r,s})^{p(n-rs)},$$
$$d_n^* = \det(C_n^*) = (\text{定数}) \prod_{r,s\geq 1} (\alpha - \alpha_{-r,-s})^{p(n-rs)}. \tag{3.161}$$

が成り立つことが示される.

この証明は次節にゆずり,ここでは,これらの行列式が 0 になることの意味を考えておこう. d_n の各因子は,対応する $|\,\alpha_{r,s}\,\rangle$ から L_n の作用で得られるベクトルの間に非自明な 1 次関係式が存在することを示している.実際,次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&L_{-1}\,|\,\alpha_{1,1}\,\rangle = 0,\\
&\left(L_{-1}^2 - \frac{\beta^2}{2}L_{-2}\right)|\,\alpha_{2,1}\,\rangle = 0,\\
&\left(L_{-1}^2 - \frac{2}{\beta^2}L_{-2}\right)|\,\alpha_{1,2}\,\rangle = 0,\\
&\left(L_{-1}^3 - 2\beta^2 L_{-2}L_{-1} + (\beta^4-\beta^2)L_{-3}\right)|\,\alpha_{3,1}\,\rangle = 0,\\
&\left(L_{-1}^3 - \frac{8}{\beta^2}L_{-2}L_{-1} + \left(\frac{16}{\beta^4} - \frac{4}{\beta^2}\right)L_{-3}\right)|\,\alpha_{1,3}\,\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{3.162}$$

一方, d_n^* の各因子は, $H_{\alpha_{r,s}}$ のベクトルであって $\langle\,\alpha_{r,s}\,|\,\{L_n\,|n>0\}$ の任意の元とのペアリングが 0 となる (実はもっと強く L_n $(n>0)$ の作用で 0 となる) ような特異ベクトルの存在を示している.実際,次にあげるものは特異ベクトルである.

$$\begin{aligned}
&a_{-1}\,|\,\alpha_{-1,-1}\,\rangle,\\
&\left(a_{-1}^2 - \frac{\beta}{2}a_{-2}\right)|\,\alpha_{-2,-1}\,\rangle,\\
&\left(a_{-1}^2 + \frac{1}{\beta}a_{-2}\right)|\,\alpha_{-1,-2}\,\rangle,\\
&\left(a_{-1}^3 - \frac{3\beta}{2}a_{-2}a_{-1} + \frac{\beta^2}{2}a_{-3}\right)|\,\alpha_{-3,-1}\,\rangle,\\
&\left(a_{-1}^3 + \frac{3}{\beta}a_{-2}a_{-1} + \frac{2}{\beta^2}a_{-3}\right)|\,\alpha_{-1,-3}\,\rangle.
\end{aligned} \tag{3.163}$$

3.11 特異ベクトルの構成

行列式公式 (3.161) を証明する基本的な方針は，特異ベクトルの存在を，ある積分によって構成的に示すことである．すなわち，

$$\rho = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta}, \qquad \alpha_{-r,-s} = \frac{1+r}{2}\beta - \frac{s+1}{\beta} \quad (r, s > 0) \tag{3.164}$$

のとき，$H_{\alpha_{-r,-s}}$ はレベル rs に特異ベクトル $\left|\chi_{-r,-s}\right\rangle$ をもつことを示そう．これがいえると，その descendants

$$L_{-1}^{\nu_1} L_{-2}^{\nu_2} \cdots L_{-k}^{\nu_k} \left|\chi_{-r,-s}\right\rangle, \quad \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + k\nu_k = n - rs \tag{3.165}$$

がすべて d_n^* の零点に寄与して，行列式 d_n^* の因子

$$(\alpha - \alpha_{-r,-s})^{p(n-rs)} \tag{3.166}$$

を与える．一方，d_n^* の α に関する次数の評価から，上に得られたものですべての因子がつきることがわかり，d_n^* の行列式公式が従う．同時に，d_n の公式も (3.159) から従うという筋書きである．まず，d_n の次数の評価をみておこう (d_n^* も同じ)．(3.154) から，$L_{-p}^{m_p} \cdots L_{-1}^{m_1} \left|\alpha\right\rangle$ は α について $\sum_r m_r$ 次である．したがって，d_n の次数は $\sum_r r m_r = n$ をみたす $m_r \geq 0$ に関する和

$$\deg(d_n) = \sum_m \sum_{r \geq 1} m_r \tag{3.167}$$

で与えられる．すなわち，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \deg(d_n) q^n &= \sum_m \sum_{r \geq 1} m_r q^{\sum_j j m_j} \\
&= \sum_{r \geq 1} \frac{q^r}{(1-q^r)^2} \prod_{j(\neq r) \geq 1} \frac{1}{1-q^j} \\
&= \sum_{r \geq 1} \frac{q^r}{1-q^r} \prod_{j \geq 1} \frac{1}{1-q^j} \\
&= \sum_{r,s \geq 1} q^{rs} \sum_n p(n) q^n
\end{aligned} \tag{3.168}$$

となり，期待される次数

$$\deg(d_n) = \sum_{r,s \geq 1} p(n - rs)$$

を得る．

そこで，特異ベクトルを構成しよう．そのために遮蔽作用素を導入する．これは，自由場表示において基本的に重要な概念である．まず，遮蔽カレント $S(z)$

を

$$S(z) = V_\beta(z) = :e^{\beta\varphi(z)}: \tag{3.169}$$

で定義する．この共形次元は

$$\Delta = \frac{\beta^2}{2} - \rho\beta = 1 \tag{3.170}$$

になる (こうなるように ρ を選んだのである). これより，ストレステンソルとの OPE は

$$\begin{aligned} T(z)S(w) &= \frac{1}{(z-w)^2}S(w) + \frac{1}{z-w}\frac{\partial}{\partial w}S(w) + \cdots \\ &= \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{z-w}S(w)\right) + \cdots \end{aligned} \tag{3.171}$$

となる．したがって，積分の境界の寄与を無視すれば，

$$\left[T(z), \oint dw S(w)\right] = 0 \tag{3.172}$$

が得られる．すなわち，**遮蔽作用素** Q を

$$Q = \oint dw S(w) \tag{3.173}$$

と定義すれば，Q は Virasoro 代数 L_n と可換となる．とくに，boson の荷電真空 $|\,\alpha\,\rangle$ の最高重み条件 (3.152) も Q の作用で保たれるので，ベクトル

$$Q^r\,|\,\alpha\,\rangle \tag{3.174}$$

は，それが 0 でないかぎり特異ベクトルを与える．

$Q^r\,|\,\alpha\,\rangle$ を計算してみよう．まず定義より

$$\begin{aligned} Q^r\,|\,\alpha\,\rangle &= \int dz_1\cdots dz_r V_\beta(z_1)\cdots V_\beta(z_r)\,|\,\alpha\,\rangle \\ &= \int dz_1\cdots dz_r \prod_{1\le i<j\le r}(z_i - z_j)^{\beta^2} :V_\beta(z_1)\cdots V_\beta(z_r):\,|\,\alpha\,\rangle \end{aligned} \tag{3.175}$$

と書ける．ここで

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta\frac{a_{-n}}{n}z^n\right) = \sum_{m=0}^{\infty}p_m z^m \tag{3.176}$$

とおき，V_β のゼロモード $e^{\beta q}$ の作用

$$e^{\beta q}\,|\,\alpha\,\rangle = |\,\alpha+\beta\,\rangle \tag{3.177}$$

に注意すれば，

$$Q^r \,\big|\, \alpha \,\big\rangle = \int dz_1 \cdots dz_r \prod_{1\le i<j\le r} (z_i - z_j)^{\beta^2} \sum_{m_i \ge 0} \prod_{i=1}^{r} p_{m_i} z_i^{m_i+\alpha\beta} \,\big|\, \alpha + r\beta \,\big\rangle \tag{3.178}$$

となる．この $\prod_{i=1}^{r} p_{m_i}$ の係数として現れる積分が非自明である (0 でない積分値を与えるサイクルが存在する) ためには，変換 $z_i \to \lambda z_i$ に対する不変性より

$$r + \frac{r(r-1)}{2}\beta^2 + \sum_{i=1}^{r} m_i + r\alpha\beta = 0 \tag{3.179}$$

が必要である．ベクトル $Q^r \,\big|\, \alpha \,\big\rangle$ のレベル $N = \sum_{i=1}^{r} m_i$ を $N = rs$ とすれば

$$\alpha = \frac{1-r}{2}\beta - \frac{1+s}{\beta} \tag{3.180}$$

となる．実際，$r, s > 0$ が整数のとき積分 (3.178) は非自明となり

$$H_{\alpha+r\beta} = H_{\alpha_{-r,-s}} \tag{3.181}$$

のレベル rs の特異ベクトルが得られる[16]．

以上により，行列式公式 (3.161) が示された．また，その系として，有名な **Kac 行列式**が得られる．

$$\det K_n = (\text{定数}) \prod_{r,s\ge 1} (h - h_{r,s})^{p(n-rs)} \tag{3.182}$$

証明． Kac 行列 K_n の要素

$$\big\langle\, h \,\big|\, L_1^{\mu_1} \cdots L_n^{\mu_n} L_{-n}^{\nu_n} \cdots L_{-1}^{\nu_1} \,\big|\, h \,\big\rangle \tag{3.183}$$

は，boson 表示で $h = \dfrac{\alpha^2}{2} - \rho\alpha$ として

$$\big\langle\, \alpha \,\big|\, L_1^{\mu_1} \cdots L_n^{\mu_n} L_{-n}^{\nu_n} \cdots L_{-1}^{\nu_1} \,\big|\, \alpha \,\big\rangle \tag{3.184}$$

と計算してもよい．(3.184) では，H_α において $a_{-n}^{\nu_n} \cdots a_{-1}^{\nu_1} \,\big|\, \alpha \,\big\rangle$，$\big\langle\, \alpha \,\big|\, a_1^{\mu_1} \cdots a_n^{\mu_n}$ が

16) 本書の特異ベクトルに関する議論は，巻末文献 [4] に収められた M. Kato and S. Matsuda, "Null Field Construction in Conformal and Superconformal Algebras", 205–254 に基づく．これには超対称 Virasoro 代数の場合も議論されている．積分 (3.178) の非自明性を示すには，実際にサイクルを構成し積分を評価しなければならないが，これは A. Tsuchiya and Y. Kanie, "Fock Space Representations of the Virasoro Algebra —— Intertwining Operators", Publ. RIMS, Kyoto Univ. **22–2** (1986) 259–237 でなされた．自由場表示の特異ベクトルは **Jack 多項式**とよばれる対称多項式により具体的に書けることが知られている．K. Mimachi and Y. Yamada, "Singular Vectors of the Virasoro Algebra in Terms of Jack Symmetric Polynomials", Comm. Math. Phys. **174** (1995) 447–455.

完全系をなすことから，これを間にはさむことにより

$$\det(K_n) = (\text{定数})\ d_n d_n^* \tag{3.185}$$

が得られる．したがって

$$(\alpha - \alpha_{r,s})(\alpha - \alpha_{-r,-s}) = 2(h - h_{r,s})$$

に注意すれば，求める結果 (3.182) を得る．ここで，$\beta^2 = 2t$ とおき，対応して

$$h_{r,s} = \frac{1}{2}\left[\left(r\frac{\beta}{2} - s\frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta}\right)^2\right] = \frac{(rt-s)^2 - (t-1)^2}{4t}, \tag{3.186}$$

$$c = 1 - 12\rho^2 = 1 - 12\left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta}\right)^2 = 13 - 6\left(t + \frac{1}{t}\right) \tag{3.187}$$

を用いた． □

自由場表示での h と α の関係は

$$h = h(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \rho\alpha = \frac{1}{\alpha}(\alpha - 2\rho) \tag{3.188}$$

であるから，1 つの h について，対応する α は $\alpha, \rho - \alpha$ の 2 通りがある．とくに，$\rho = \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{1}{\beta}$ に対して $h(\alpha) = 1$ となる α は，β と $-\dfrac{2}{\beta}$ の 2 つがある．そこで

$$\begin{aligned} Q_+ &= \int dz V_\beta(z), \\ Q_- &= \int da V_{-\frac{2}{\beta}}(z) \end{aligned} \tag{3.189}$$

のどちらでも，あるいは両方とも，遮蔽作用素として用いることができる．また，共形次元 $h = h_{r,s}$ をもつ primary 場の boson 表示にも

$$V_{\alpha_{r,s}}(z), \quad V_{\alpha_{-r,-s}}(z) \tag{3.190}$$

の両方が可能である．primary 場の相関関数は，これらの頂点作用素の真空期待値の積分として求めることができる．これは，Dotsenko (ドツェンコ) と Fateev (ファテエフ) によって与えられた処方箋である[17]．

ここでは，合成則を自由場の方法で導いておこう．h_{r_1,s_2}, h_{r_2,s_2} の重みをもつ 2 つの primary 場の OPE からどのような primary 場が現れうるかが問題で

17) 巻末文献 [4] にある Vl. S. Dotsenko の解説 “Lectures on Conformal Field Theory”, 123–170 は数学者にも読みやすいと思う．

あった．自由場では

$$V_{\alpha_{r_2,s_2}}(z_2)V_{\alpha_{r_1,s_1}}(z_1) = (z_1 - z_2)^{\alpha_{r_2,s_2}\alpha_{r_1,s_1}} V_{\alpha_{r_2,s_2}+\alpha_{r_1,s_1}}(z_2) + \cdots \tag{3.191}$$

のみしか可能性がないようであるが，Virasoro 代数との交換関係を壊すことなく遮蔽作用素を施すことが可能である．そこで

$$Q_+^m Q_-^n V_{\alpha_{r_2,s_2}}(z_2)V_{\alpha_{r_1,s_1}}(z_1) \tag{3.192}$$

から $V_{\alpha_{r_3,s_3}}$ を得たとすると，

$$\alpha_{r_1,s_1} + \alpha_{r_2,s_2} + m\beta - n\frac{1}{\beta} = \alpha_{r_3,s_3}, \tag{3.193}$$

すなわち，

$$r_1 + r_2 - (2m+1) = r_3, \qquad s_1 + s_2 - (2n+1) = s_3 \tag{3.194}$$

が得られる．ここで，$m, n = 0, 1, 2, \ldots$ であるが，式 (3.145) の多項式 $P(h)$ の次数からもわかるように，これはどこまでも可能というわけではなく，$m = \min(r_1, r_2)$ または $n = \min(s_1, s_2)$ の場合に，得られるベクトルが特異ベクトルとなるため，そこで打止めとなる．こうして，式 (3.141)，したがって合成則が示された．

3.12 Virasoro 代数の拡張

Virasoro 代数は共形次元 2 のストレステンソル $T(z)$ のなす代数であった．本節では共形次元 2 以外の場を含めた Virasoro 代数の拡張について簡単にみておこう．こうした拡張の研究は，BPZ の直後に Zamolodchikov[18] によりはじめられた[19]．

3.12.1 カレント代数

共形次元 1 の作用素を (狭義の) **カレント**という (より一般に，整数または半整数次元の作用素をカレントということもある)．d 個の boson 的 (＝可換な)

18) A. B. Zamolodchikov, "Infinite Additional Symmetries in Two-dimensional Conformal Quantum Field Theory", Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika **65** (1985) 347–359.

19) Dotsenko-Fateev の自由場表示や Zamolodchikov のこの仕事，さらに後半の主題となる KZ 方程式などなど $\cdots$，共形場理論に関する基本的アイデアのほとんどは，BPZ 直後 1,2 年の Landau スクールの研究によって出尽くした感がある．

カレント $J^a(z)$ のなす代数を考える．次元の考察から可能な OPE は

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{k^{ab}}{(z-w)^2} + \sum_{c=1}^{d} \frac{f^{ab}{}_c}{z-w} J^c(w) + \cdots \tag{3.195}$$

の形となる．ここに k^{ab}, $f^{ab}{}_c$ は適当な定数である．

$$J^a(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} J^a_n z^{-n-1} \tag{3.196}$$

とおいて交換関係に書き直せば

$$[J^a_m, J^b_n] = k^{ab} m \delta_{m+n,0} + \sum_{c=1}^{d} f^{ab}{}_c J^c_{m+n} \tag{3.197}$$

となる．この交換関係が反対称で Jacobi 恒等式を満たし Lie 代数をなすとき，これを**カレント代数**という．これについては次の章で詳しく述べることにしよう．

3.12.2 超対称 Virasoro 代数

共形次元 2 の boson 的な場 $T(z)$ および 3/2 の fermion 的な場 $G(z)$ について，次の OPE で定義される代数を**超対称 Virasoro 代数**という．

$$\begin{aligned}
T(z)T(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}T'(w) + \cdots, \\
T(z)G(w) &= \frac{3/2}{(z-w)^2}G(w) + \frac{1}{z-w}G'(w) + \cdots, \\
G(z)G(w) &= \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2}{z-w}T(w) + \cdots.
\end{aligned} \tag{3.198}$$

$T(z)$, $G(z)$ の展開係数として，作用素 L_n, G_r を

$$\begin{aligned}
T(z) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n z^{-n-2}, \\
G(z) &= \sum_{r} G_r z^{-r-\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{3.199}$$

で与える．G_r の添字は整数にとる場合 (Ramond 代数) と半整数にとる場合 (NS 代数) とが考えられる．これより，(反) 交換関係

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}, \\
[L_m, G_r] &= \left(\frac{m}{2} - r\right) G_{m+r}, \\
[G_r, G_s]_+ &= 2L_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}
\end{aligned} \tag{3.200}$$

が導かれる．超対称 Virasoro 代数 (3.200) の最高重み表現は，

$$
\begin{aligned}
&L_0 \,|\, h \rangle = h \,|\, h \rangle, \\
&L_n \,|\, h \rangle = G_r \,|\, h \rangle = 0 \qquad (n, r > 0)
\end{aligned} \tag{3.201}
$$

を満たすベクトルに L_n, G_r $(n, r < 0)$ を作用させて得られる．この表現では，$t \neq 0$ および正整数 r, s に対して，

$$
c = \frac{15}{2} - 3\left(t + \frac{1}{t}\right),
$$

$$
h_{r,s} = \begin{cases} \dfrac{(rt-s)^2 - (t-1)^2}{8t}, & r - s = \text{偶数} \quad (\text{NS}), \\ \dfrac{(rt-s)^2 - (t-1)^2}{8t} + \dfrac{1}{16}, & r - s = \text{奇数} \quad (\text{Ramond}) \end{cases} \tag{3.202}
$$

となる場合にレベル $rs/2$ の特異ベクトルが存在する．その特異ベクトルは NS 代数では定数倍を除いて一意であるが，Ramond 代数では $|\, \chi \rangle$ が特異ベクトルであれば $G_0 \,|\, \chi \rangle$ もそうであるので 2 次元分存在する．

超対称 Virasoro 代数の自由場による実現は，

$$
\begin{aligned}
&\varphi(z)\varphi(w) = \log(z-w) + \cdots, \\
&\psi(z)\psi(w) = \frac{1}{z-w} + \cdots
\end{aligned} \tag{3.203}
$$

を満たす自由 boson φ と fermion ψ により

$$
\begin{aligned}
&T(z) = \,:\frac{1}{2}\varphi'(z)^2 + \rho\varphi''(z) + \frac{1}{2}\psi'(z)\psi(z):, \\
&G(z) = \,:\varphi'(z)\psi(z) + 2\rho\psi'(z):
\end{aligned} \tag{3.204}
$$

と与えられる．これは

$$
c = \frac{3}{2} - 12\rho^2
$$

の表現を与える．

3.12.3　拡大超対称 Virasoro 代数

共形次元 3/2 の場 $G_i(z)$ が複数 $(i = 1, \ldots, N)$ ある場合は，拡大超対称 Virasoro 代数という．応用上とくに重要なのは $N = 2$ **超対称代数**であり，その OPE は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
T(z)T(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}T'(w) + \cdots , \\
T(z)G^{\pm}(w) &= \frac{3/2}{(z-w)^2}G^{\pm}(w) + \frac{1}{z-w}G^{\pm\prime}(w) + \cdots , \\
T(z)J(w) &= \frac{1}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{z-w}J'(w) + \cdots , \\
J(z)G^{\pm}(w) &= \frac{\pm}{z-w}G^{\pm}(w) + \cdots , \\
G^{+}(z)G^{-}(w) &= \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2}{(z-w)^2}J(w) + \frac{2}{z-w}T(w) \\
&\qquad + \frac{1}{z-w}J'(w) + \cdots , \\
J(z)J(w) &= \frac{c/3}{(z-w)^2} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{3.205}
$$

対応する (反) 交換関係は

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}, \\
&[L_m, G_r^{\pm}] = \left(\frac{m}{2} - r\right) G_{m+r}^{\pm}, \\
&[L_m, J_n] = -nJ_{m+n}, \\
&[J_m, G_r^{\pm}] = \pm G_{m+r}^{\pm}, \\
&[G_r^{+}, G_s^{-}]_{+} = 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}, \\
&[J_m, J_n] = \frac{c}{3}\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
\tag{3.206}
$$

である．ここに

$$
T(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n z^{-n-2}, \quad J(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} J_n z^{-n-1}, \quad G^{\pm}(z) = \sum_{r} G_r^{\pm} z^{-r-\frac{3}{2}}
\tag{3.207}
$$

であり，添字 r, s は整数 (NS) か半整数 (Ramond) をとる[20]．

20) 自由場表現に基づく (拡大) 超対称 Virasoro 代数の表現については，Kato-Matsuda の文献 (p.88 脚注) を参照されたい．

3.12.4 W 代数

さらに高い次元のカレントを含んだ代数の例としては，W **代数**が知られている．一番簡単な場合は，T のほかに次元 3 のカレント W を含む W_3 **代数**であり，次の OPE により定義される．

$$
\begin{aligned}
T(z)T(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}T'(w) + \cdots, \\
T(z)W(w) &= \frac{3}{(z-w)^2}W(w) + \frac{1}{z-w}W'(w) + \cdots, \\
W(z)W(w) &= \frac{c/3}{(z-w)^6} + \frac{2}{(z-w)^4}T(w) + \frac{1}{(z-w)^3}T'(w) \\
&\quad + \frac{1}{(z-w)^2}\left(\frac{3}{10}T''(w) + \frac{32}{5c+22}\Lambda(w)\right) \\
&\quad + \frac{1}{z-w}\left(\frac{1}{15}T'''(w) + \frac{16}{5c+22}\Lambda'(w)\right) + \cdots,
\end{aligned}
\tag{3.208}
$$

対応する交換関係は

$$
\begin{aligned}
T(z) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n z^{-n-2}, \\
W(z) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} W_n z^{-n-3}
\end{aligned}
\tag{3.209}
$$

と展開して，

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}, \\
[L_m, W_n] &= (2m-n)W_{m+n}, \\
[W_m, W_n] &= \frac{c}{360}(m^2-4)(m^2-1)m\delta_{m+n,0} + \frac{16}{5c+22}(m-n)\Lambda_{m+n} \\
&\quad + (m-n)\left(\frac{1}{15}(m+n+2)(m+n+3) - \frac{1}{6}(m+2)(n+2)\right)L_{m+n}
\end{aligned}
\tag{3.210}
$$

となる．ここに $\Lambda(z)$ は (3.80) で定義されたもので，

$$
\begin{aligned}
\Lambda(z) &= (TT)(z) - \frac{3}{10}T''(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \Lambda_n z^{-n-4}, \\
\Lambda_n &= \sum_{m\geq -1} L_{n-m}L_m + \sum_{m<-1} L_m L_{n-m} - \frac{3}{10}(n+2)(n+3)L_n
\end{aligned}
\tag{3.211}
$$

である．交換関係 $[W_m, W_n]$ に L_n の 2 次式が現れるので，W_3 代数は Lie 代数ではない．一般に，有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して対応する W 代数が知られており，Virasoro 代数は $\mathfrak{sl}_2$，W_3 代数は $\mathfrak{sl}_3$ に対応する．

W_3 代数の最高重み表現 $M_{c,h,w}$ は

$$\begin{aligned} &L_0 \,|\, h,w \,\rangle = h \,|\, h,w \,\rangle, \quad W_0 \,|\, h,w \,\rangle = w \,|\, h,w \,\rangle, \\ &L_n \,|\, h,w \,\rangle = W_n \,|\, h,w \,\rangle = 0 \qquad (n > 0) \end{aligned} \tag{3.212}$$

を満たすベクトルに L_n, W_n $(n < 0)$ を作用させて得られる．便宜上，パラメータ (c,h,w) を (a,x,y) によって

$$\begin{aligned} c &= 2 - 24\Big(a - \frac{1}{a}\Big)^2, \\ h &= \frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2) - \Big(a - \frac{1}{a}\Big)^2, \\ w &= \frac{1}{27}\left(\frac{5c+22}{48}\right)^{1/2}(x-y)(2x+y)(x+2y) \end{aligned} \tag{3.213}$$

と表す．この表示で，整数 $r, s > 0$ に対して

$$\prod_{z=\pm x, \pm y, \pm(x+y)} \Big(z + ra - \frac{s}{a}\Big) = 0 \tag{3.214}$$

の関係が成り立つとき，$M_{c,h,w}$ はレベル rs の特異ベクトルをもつ[21)]．

---

21) W_n 代数の自由場表示および相関関数の計算は，V.A. Fateev and S.L. Lykyanov "The models of two-dimensional conformal quantum field theory with Z_n symmetry", Int. J. Mod. Phys. **A3** (1988) 507–520 による．これに基づいて，W_3 の特異ベクトル，Kac 行列式公式が，S. Mizoguchi, "Determinant formula and unitarity for the W_3 algebra.", Phys. Lett. **B222** (1989) 226–230 で与えられた．

4章

WZW模型

本章では，ミニマル模型とならんで典型的な共形場理論である WZW 模型を扱う．この模型は affine Lie 代数の対称性をもち，これを用いて詳細な議論が可能となる．章の前半では，Lie 代数の表現論について必要な事項を例とともに説明する．4.7 節以降で，WZW 模型の対称性を表すカレント代数から，KZ 方程式とよばれる基本的微分方程式を導き，その一般的性質を議論する．

4.1 Lie 代数

次の 3 つの行列を Pauli の**スピン行列**という．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

これは，次の関係を満たす．

$$\begin{gathered} \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1, \\ \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2 \end{gathered} \tag{4.2}$$

スピン行列は，もともと電子のスピン (自転) を記述するために導入されたものである[1]．その名のとおり，この行列は 3 次元空間の回転と関わっており，$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ をベクトルのように扱うことができる．$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ を単位ベクトルとし

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3, \tag{4.3}$$

1) 古くは Hamilton の四元数までさかのぼる．スピンの発見の経緯などは「スピンはめぐる—成熟期の量子力学—」朝永振一郎，自然選書 (中央公論社) 1974，に詳しい．ほかに，場の量子化等についても，本質をえぐり出す一流の解説があり，多くの逸話とともに，「読みもの」として一読するだけでも得るところは多い．

$$U(\theta) = \exp\left(i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)$$
$$= \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2} \tag{4.4}$$

とおけば

$$U(\theta)^{-1}\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,U(\theta) = \boldsymbol{r}(\theta)\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{4.5}$$

が成り立つ．ここで

$$\boldsymbol{r}(\theta) = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n})\cos\theta + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}\sin\theta \tag{4.6}$$

はベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{n}$ を軸として角 θ だけ回転させたものである．重要なのは式 (4.4) の $\theta/2$ で，この 1/2 のために $U(2\pi) = -\mathbf{1}$ となり 4π 回転ではじめて $U(4\pi) = \mathbf{1}$ となる．電子のスピンが 1/2 という半端な単位に数えられるのはこのためである．

スピン行列は，電子のスピンの記述以外にもいろいろな問題に広く応用され，物理学者にとっては必携の小道具である．特別な性質をもつ行列がいろいろな場面で活躍することは，種々の特殊関数が広い応用をもつことと事情は同じであり，その意味でスピン行列は**特殊行列**の一つといえる．これから 4.6 節まで，特殊行列を系統的に生み出す手段という観点から，単純 Lie 代数[2)]の表現論を概観していく．

n を 2 以上の整数とする．$n\times n$ 行列でトレースが 0 のもの全体を $\mathfrak{sl}_n$ で表す．$\mathfrak{sl}_n$ は交換子積 [,]

$$[X, Y] = XY - YX \tag{4.7}$$

で閉じており，これにより Lie 代数となる．

$\mathfrak{sl}_n$ はベクトル空間としては n^2-1 次元である．$E_{i,j}$ を i 行 j 列のみ 1 で他は 0 であるような**行列単位**とし，

$$\begin{aligned} e_i &= E_{i,i+1}, \\ f_i &= E_{i+1,i}, \qquad\qquad (i = 1,\ldots,n-1) \\ h_i &= E_{i,i} - E_{i+1,i+1}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

とすると，これらは $\mathfrak{sl}_n$ を Lie 代数として生成する．つまり，$\mathfrak{sl}_n$ の任意の元は，これらの交換子の線形結合として生成される．次の式は，定義より直接確

2) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が単純とは $\dim\mathfrak{g} \geq 2$ であり，非自明なイデアルをもたない ($\mathfrak{i}\subset\mathfrak{g}$ が $[\mathfrak{i},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{i}$ ならば $\mathfrak{i} = \{0\}$ または $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}$) と定義される．後者の条件は随伴表現が既約という意味．

かめられる.

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i,$$
$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j. \tag{4.9}$$

ここで, a_{ij} は次で与えられる.

$$a_{ii} = 2, \quad a_{ii\pm1} = -1, \quad a_{ij} = 0 \qquad (|i-j| > 1). \tag{4.10}$$

さらに次が成り立つ.

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{ad}\ e_i)^{-a_{ij}+1}(e_j) = 0,\\ (\mathrm{ad}\ f_i)^{-a_{ij}+1}(f_j) = 0\end{array}\right. \qquad (i \neq j). \tag{4.11}$$

ここに

$$(\mathrm{ad}\ x)^n(y) = [x, \ldots, [x, [x, y]\ ] \cdots] \qquad (\text{括弧は } n \text{ 重})$$

である.

重要なことは, 上記の性質 (4.9), (4.11) により, Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n$ が特徴づけられる点である. このことに注目して, Kac と Moody は次のような Lie 代数を定義した (1967 年).

次の条件

$$a_{ii} = 2, \quad a_{ij} \leq 0 \quad (i \neq j), \quad a_{ij} = 0 \Longleftrightarrow a_{ji} = 0 \tag{4.12}$$

を満たす整数行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq l}$ に対して, $3l$ 個の元 e_i, h_i, f_i と, 基本関係式

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \tag{4.13}$$

$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \tag{4.14}$$

$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{-a_{ij}+1}(e_j) = 0, \quad (\mathrm{ad}\, f_i)^{-a_{ij}+1}(f_j) = 0 \quad (i \neq j) \tag{4.15}$$

により定まる Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を, A に付随する **Kac-Moody 代数**という. このとき, A を **Cartan 行列**, e_i, h_i, f_i を **Chevalley 生成子**, 関係式 (4.15) を **Serre 関係式**という.

$\mathfrak{g}(A)$ が有限次元単純 Lie 代数になるような Cartan 行列は有限型とよばれ, 以下のように分類されている.

$$A_{l\,(\geq 1)}:\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad B_{l\,(\geq 2)}:\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C_{l\,(\geq 2)}:\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -2 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D_{l\,(\geq 4)}:\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & \\ & & & -1 & & 2 \end{pmatrix},$$

$$E_{l\,(=6,7,8)}:\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & & & -1 \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & & \\ & & -1 & & & & 2 \end{pmatrix},\quad F_4:\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -2 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$G_2:\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

4.2　最高重み表現

前節に定義 (列挙) した有限次元単純代数 $\mathfrak{g}$ の具体的な表現行列を求める[3]．そのために，まず

$$e_i \,|\, \lambda \,\rangle = 0, \qquad h_i \,|\, \lambda \,\rangle = \lambda_i \,|\, \lambda \,\rangle \tag{4.17}$$

を満たすベクトル $|\lambda\rangle$ を用意する．ここに $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l) \in \mathbf{C}^l$ は表現を指定するパラメータであり，l は Cartan 行列 (a_{ij}) のサイズでランクとよばれる．ベクトル $|\lambda\rangle$ に，f_j たちを次々と作用させて得られるベクトルの線形結合全体 M_λ を考える (**Verma 加群**)．行列 $h_1, \ldots, h_l$ たちは互いに可換なので，それらの同時固有値を考えることができる．その固有値 (l 次元ベクトル) を**重み**という．交換関係

$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \qquad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j \tag{4.18}$$

より，e_j, f_j は h_i の固有値を a_{ij} だけ上げたり下げたりする昇降演算子として作用する．上記の定義 (4.17) は，ベクトル $|\lambda\rangle$ が M_λ の**最高重みベクトル**であることを意味する．一般に，h_i の作用は次で得られる．

$$h_i f_{j_1} \cdots f_{j_m} \,|\, \lambda \,\rangle = \Bigl(\lambda_i - \sum_{p=1}^{m} a_{i j_p}\Bigr) f_{j_1} \cdots f_{j_m} \,|\, \lambda \,\rangle \tag{4.19}$$

一般の λ では M_λ は既約で無限次元であるが，特別な λ に対しては，M_λ に**特異ベクトル**が現れ可約になる．とくに λ_i が非負整数の場合，$|\,\chi_i\,\rangle = f_i^{\lambda_i+1} \,|\, \lambda \,\rangle$ は特異ベクトルである．すなわち

$$e_j \,|\, \chi_i \,\rangle = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, l) \tag{4.20}$$

が成り立つ．実際，$j \neq i$ の場合は自明であり，$j = i$ の場合は

$$\begin{aligned} e_i f_i^{n+1} \,|\, \lambda \,\rangle &= \sum_{p=0}^{n} f_i^{n-p} [e_i, f_i] f_i^p \,|\, \lambda \,\rangle \\ &= \sum_{p=0}^{n} (\lambda_i - 2p) f_i^n \,|\, \lambda \,\rangle = (n+1)(\lambda_i - n) f_i^n \,|\, \lambda \,\rangle \end{aligned} \tag{4.21}$$

より従う．

そこで，λ_i が非負整数の場合には，(4.17) に加えて，

$$f_i^{\lambda_i+1} \,|\, \lambda \,\rangle = 0 \tag{4.22}$$

を課すことにより，余計な部分を削りとって，より小さな表現が得られる．す

3)　簡単のため，有限次元単純 Lie 代数について説明するが，ほとんどの部分は一般の場合にも拡張可能である．そのように定義されているところが Kac-Moody 代数の偉いところである．

べての λ_i が非負整数で条件 (4.22) に従う表現を**可積分表現**といい L_λ と表す．可積分表現を表す非負整数の重み $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ は**可積分な重み** (または支配的整重み) とよばれる．まとめると，可積分な重み $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ に対して，$\mathfrak{g}$ の可積分表現 L_λ は，

$$e_i \,|\, \lambda \,\rangle = 0, \quad h_i \,|\, \lambda \,\rangle = \lambda_i \,|\, \lambda \,\rangle, \quad f_i^{\lambda_i+1} \,|\, \lambda \,\rangle = 0 \tag{4.23}$$

を満たす $|\,\lambda\,\rangle$ に，左から $\mathfrak{g}$ の元を次々に作用させて得られる．

ここで，e_i と f_i の役割を入れ換え，同時に積の順序を逆にしても，$\mathfrak{g}$ を定義する基本関係式 (4.13), (4.14), (4.15) は変わらないことに注意しよう．そこで，

$$\langle\,\lambda\,|\, f_i = 0, \quad \langle\,\lambda\,|\, h_i = \langle\,\lambda\,|\, \lambda_i, \quad \langle\,\lambda\,|\, e_i^{\lambda_i+1} = 0 \tag{4.24}$$

を満たす $\langle\,\lambda\,|$ に，右から $\mathfrak{g}$ の元を次々に作用させて得られる表現として L_λ^* を定義する．L_λ^* と L_λ は

$$\begin{aligned} &\langle\,\lambda\,|\,\lambda\,\rangle = 1, \\ &\langle\,u\,|\Big(x\,|\,v\,\rangle\Big) = \Big(\langle\,u\,|\,x\Big)\,|\,v\,\rangle, \end{aligned} \tag{4.25}$$

($\langle\,u\,| \in L_\lambda^*$, $|\,v\,\rangle \in L_\lambda$, $x \in \mathfrak{g}$) により定まるペアリング $L_\lambda^* \times L_\lambda \to \mathbf{C}$ によって互いに双対空間になるので，L_λ^* を L_λ の**双対表現**とみなせる．

L_λ の適当な基底 $|\,j\,\rangle$ ($j = 1, \ldots, n = \dim L_\lambda$) と，ペアリング $\langle\,i\,|\,j\,\rangle = \delta_{ij}$ により定義される**双対基底** $\langle\,i\,| \in L_\lambda^*$ ($i = 1, \ldots, n$) によって，$x_{ij} = \langle\,i\,|\,x\,|\,j\,\rangle$ とすれば，この x_{ij} が $x \in \mathfrak{g}$ の表現の行列要素を与える．次節で可積分表現の表現行列の例を示す．公式

$$\langle\,i\,|\,j\,\rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{n} |\,i\,\rangle\langle\,i\,| = 1 \qquad (L_\lambda\text{上の恒等変換}) \tag{4.26}$$

などを使って，機械的に計算が進むところが，この Dirac 記法の長所である．

最後に，表現空間に定義される内積について少し補足しておこう．表現 L_λ^* は，表現 L_λ を，

$$e_i^* = f_i, \quad h_i^* = h_i, \quad f_i^* = e_i, \quad |\,\lambda\,\rangle^* = \langle\,\lambda\,|, \quad (xy)^* = y^* x^* \tag{4.27}$$

という規則 (の $\mathbf{C}$–線形な拡張) により書き換えたものである．この書き換えで $|\,u\,\rangle \in L_\lambda$ に対応する $|\,u\,\rangle^* \in L_\lambda^*$ と $|\,v\,\rangle \in L_\lambda$ との上記のペアリングとして L_λ 上の双線形形式が定まる．同様にして定まる M_λ 上の双線形形式を**反変内**

積とよぶ[4)]．その行列式である **Shapovalov 行列式**は，Verma 加群 M_λ がいつ退化するかを教えてくれる．Virasoro 代数の Kac 行列式は Shapovalov 行列式の Virasoro 版である．

4.3 例：A_1, A_2, C_2

A_1 代数：A_1 型 Cartan 行列は $a_{11}=2$ (1×1 行列) である．この場合，添字 1 を省いて e, h, f を生成元とする．基本交換関係は

$$[h,e]=2e, \quad [h,f]=-2f, \quad [e,f]=h \tag{4.28}$$

であり，Serre 関係式は存在しない．対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}(A_1)$ は $\mathfrak{sl}_2$ であり，ベクトル空間として 3 次元である．可積分表現 L_l は，$l=0,1,2,\ldots$ に対して存在し，

$$hv=lv, \quad ev=0, \quad f^{l+1}v=0 \tag{4.29}$$

を満たす v から生成される．L_l においては，

$$\big|\, 0 \,\big\rangle = v, \quad \big|\, 1 \,\big\rangle = fv, \quad \ldots, \quad \big|\, l \,\big\rangle = f^l v \tag{4.30}$$

がその基底をなし，$\dim L_l = l+1$ である．この基底での e, h, f の作用は，

$$f\,\big|\, m \,\big\rangle = \big|\, m{+}1 \,\big\rangle, \quad h\,\big|\, m \,\big\rangle = (l{-}2m)\,\big|\, m \,\big\rangle, \quad e\,\big|\, m \,\big\rangle = m(l{-}m{+}1)\,\big|\, m{-}1 \,\big\rangle \tag{4.31}$$

で与えられる．

A_2 代数：Cartan 行列は $a_{11}=a_{22}=2$, $a_{12}=a_{21}=-1$．したがって Serre 関係式は

$$[e_1,[e_1,e_2]]=0, \quad [e_2,[e_2,e_1]]=0 \tag{4.32}$$

$$[f_1,[f_1,f_2]]=0, \quad [f_2,[f_2,f_1]]=0 \tag{4.33}$$

などとなる．$\mathfrak{g}(A_2)=\mathfrak{sl}_3$ であり，ベクトル空間としては

$$h_1,\ h_2,\ e_1,\ e_2,\ [e_1,e_2],\ f_1,\ f_2,\ [f_1,f_2] \tag{4.34}$$

がその基底になる．実際，上記 8 個の元を順に X^a と書くとき

$$(\mathrm{ad}X^a)(X^b)=[X^a,X^b]=\sum_{c=1}^{8} f^{ab}{}_c X^c \tag{4.35}$$

4) 変換 * (4.27) を **C**–共役線形 (すなわち，係数の複素共役も同時に行なう) に拡張したものは **Hermite 共役**とよばれ，対応する双線形形式を **Hermite 内積**という．

となる係数 $f^{ab}{}_c$ (**構造定数**という) が決まる．一般に ad は，$\mathfrak{g}$ 自身を表現空間とする $\mathfrak{g}$ の表現を与える．これを**随伴表現** (adjoint 表現) という．構造定数 $f^{ab}{}_c$ は随伴表現の表現行列である．

$\lambda=(1,0)$ に対する表現は

$$h_1v=v,\quad h_2v=0,\quad e_iv=0,\quad f_1^2v=0,\quad f_2v=0 \tag{4.36}$$

を満たす $v=\big|(1,0)\big\rangle$ により生成される．その基底として

$$\big|1\big\rangle=v,\quad \big|2\big\rangle=f_1v,\quad \big|3\big\rangle=f_2f_1v \tag{4.37}$$

がとれ，$\dim L_{(1,0)}=3$ である．例として $\big|3\big\rangle$ に f_1, f_2 を作用させたものが消えることを確かめておこう．実際，Serre 関係式を展開して書くと，

$$f_1^2f_2-2f_1f_2f_1+f_2f_1^2=0,\qquad f_2^2f_1-2f_2f_1f_2+f_1f_2^2=0 \tag{4.38}$$

であり，これを v に作用させて，$f_1^2v=f_2v=0$ に注意すれば，ただちに

$$f_1\big|3\big\rangle=0,\qquad f_2\big|3\big\rangle=0 \tag{4.39}$$

が従う．

さて，双対ベクトル $\big\langle i\big|$ (4.26) を用いて

$$x\big|j\big\rangle=\sum_i\big|i\big\rangle\rho_{ij}(x),\qquad \big\langle i\big|x\big|j\big\rangle=\rho_{ij}(x) \tag{4.40}$$

とおき，この基底に関する具体的な表現行列 $\rho(x)=(\rho_{ij}(x))$ を求めると

$$\rho(f_1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \rho(f_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\rho(h_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \rho(h_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \tag{4.41}$$

$$\rho(e_1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \rho(e_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

が得られる．同様に $\lambda=(0,1)$ の場合，基底として

$$v=\big|(0,1)\big\rangle,\quad f_2v,\quad f_1f_2v \tag{4.42}$$

をとることができ，$\dim L_{(0,1)} = 3$ である．

C_2 代数：Cartan 行列は $a_{11} = a_{22} = 2$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = -1$．したがって，Serre 関係式は

$$[e_1,[e_1,[e_1,e_2]]] = 0, \quad [e_2,[e_2,e_1]] = 0 \tag{4.43}$$

$$[f_1,[f_1,[f_1,f_2]]] = 0, \quad [f_2,[f_2,f_1]] = 0 \tag{4.44}$$

などとなる．これより，$\mathfrak{g}(C_2) = \mathfrak{sp}_4$ はベクトル空間としては

$$h_1,\ h_2,\ e_1,\ e_2,\ [e_1,e_2],\ [e_1,[e_1,e_2]],\ f_1,\ f_2,\ [f_1,f_2],\ [f_1,[f_1,f_2]] \tag{4.45}$$

により生成され，10 次元であることがわかる．

$\lambda = (1,0)$ に対する表現 $L_{(1,0)}$ は

$$h_1 v = v, \quad h_2 v = 0, \quad e_i v = 0, \quad f_1^2 v = 0, \quad f_2 v = 0 \tag{4.46}$$

を満たす $v = \big|\,(1,0)\,\big\rangle$ により生成され，基底として

$$\big|\,1\,\big\rangle = v, \quad \big|\,2\,\big\rangle = f_1 v, \quad \big|\,3\,\big\rangle = f_2 f_1 v, \quad \big|\,4\,\big\rangle = f_1 f_2 f_1 v \tag{4.47}$$

をとることができる．すなわち，$\dim L_{(1,0)} = 4$ である．

具体的な表現行列を，この基底に関して求めると

$$\rho(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(h_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(h_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

$$\rho(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

同様に $\lambda = (0,1)$ の場合，基底として

$$v = \big|(0,1)\big\rangle, \quad f_2 v, \quad f_1 f_2 v, \quad f_1^2 f_2 v, \quad f_2 f_1^2 f_2 v \tag{4.49}$$

をとることができ，$\dim L_{(0,1)} = 5$ である．C_2 は添字 1, 2 を入れ換えて B_2 ともみなせる．$\mathfrak{g}(B_2) = \mathfrak{so}_5$ の表現としては，4 次元表現はスピノル，5 次元表現はベクトルと解釈される．

4.4 不変内積

以下 $\mathfrak{g}$ は有限次元単純 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ は次の直和分解をもつ．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_- \tag{4.50}$$

ここに $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{h}$, および $\mathfrak{n}_-$ は，それぞれ $\{e_1, \ldots, e_l\}$, $\{h_1, \ldots, h_l\}$, および $\{f_1, \ldots, f_l\}$ から生成される部分 Lie 代数である．表現行列では，それぞれ上三角，対角，および下三角部分に対応する．$\mathfrak{n}_+$ の基底を h_i の同時固有ベクトルから選ぶことができる．例えば，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C_2)$ の場合には

$$\mathfrak{n}_+ = \mathbf{C}e_1 \oplus \mathbf{C}e_2 \oplus \mathbf{C}[e_1, e_2] \oplus \mathbf{C}[e_1, [e_1, e_2]] \tag{4.51}$$

となり，対応する固有値は

$$\Delta_+ = \{\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2, \quad 2\alpha_1 + \alpha_2\} \tag{4.52}$$

である．

一般に，固有値 $\alpha \in \Delta_+$ を**正ルート**という．正ルート α は**単純ルート** $\alpha_i = (a_{1i}, \ldots, a_{li})$ の非負整数係数の線形結合である．同様に $\mathfrak{n}_-$ では，$-\alpha$ ($\alpha \in \Delta_+$) を固有値とする固有ベクトル f_α がその基底をなす．**ルート**は $\mathfrak{g}$ 自身を随伴表現空間とみたときの重みに相当し，とくに，その最高重みを θ と書いて**最高ルート**とよぶ．$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C_2)$ の場合は $\theta = 2\alpha_1 + \alpha_2$ である．

$\mathfrak{g}$ のルート α, β の内積 (α, β) を

$$\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = a_{ij}, \qquad (\theta, \theta) = 2 \tag{4.53}$$

となるようにとることができ，これを**標準内積**とよぶ．$(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta$ と書くことも多い．この内積で，A, D, E 型ではすべての単純ルートについて $\alpha_i^2 = 2$ となる．一方，B, C, F 型では $\alpha_i^2 = 2$ または 1，であり，G_2 型では $\alpha_1^2 = 2/3$,

$\alpha_2^2 = 2$ となる．一般に，ルート α に対して，**コ・ルート** $\alpha^\vee$ を

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\alpha^2} \tag{4.54}$$

と定める．このとき Cartan 行列は $a_{ij} = (\alpha_i^\vee, \alpha_j)$ となる．

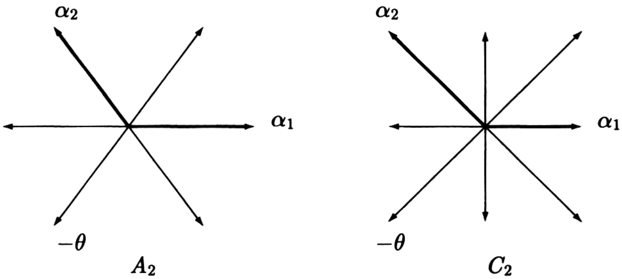


図 4.1 ルート系の例

次に，$\mathfrak{g}$ 上の対称双線形形式 $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{C}$ で

$$B([Z, X], Y) + B(X, [Z, Y]) = 0 \tag{4.55}$$

を満たすものを**不変内積**または **Killing 形式**という．適当な表現空間 V でのトレース

$$B(X, Y) = \mathrm{tr}_V \rho(X)\rho(Y) \tag{4.56}$$

は不変内積を与える．有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ では不変内積 B はスカラー倍を除いて一意的であり，($\mathfrak{h}$ に制限しても) 非退化であることが知られている．不変内積の標準的な規格化は，ルートの標準内積を用いて

$$B(h_i, h_j) = (\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee) \tag{4.57}$$

とするのが普通である (これも標準内積とよぶ).

記法に関する注意：ルート α の本来の定義は，$h \in \mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ への随伴作用に対する固有値問題 $[h, E_\alpha] = \alpha(h) E_\alpha$ の固有値 $\alpha(h)$ なので，$\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の元とみなすのが普通であるが，ここでは (標準内積による同一視により) $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ を区別しない簡便記法を用いた[5].

5) このような手抜きが思考の経済になるか否かは意見の分かれるところであろう．一般に，いずれ同一視されるべき対象をどこまで区別して扱うかは悩ましい問題である．

さて，$\mathfrak{g}$ のベクトル空間としての基底を J^a $(a = 1, 2, \ldots, d = \dim \mathfrak{g})$ として，この基底での交換関係を

$$[J^a, J^b] = \sum_{c=1}^{d} f^{ab}{}_c J^c \tag{4.58}$$

とする．J^a の適当な既約表現での表現行列を X^a として，標準内積は

$$g^{ab} = B(J^a, J^b) = c\,\mathrm{tr}(X^a X^b) \tag{4.59}$$

(c は表現ごとに決まる定数) と表される．(g_{ab}) を (g^{ab}) の逆行列として，添字の上げ下げを g^{ab}, g_{ab} で行なう．

$$f^{abc} = \sum_{p=1}^{d} f^{ab}{}_p g^{pc} = \sum_{p=1}^{d} f^{ab}{}_p c\,\mathrm{tr}(X^p X^c) = c\,\mathrm{tr}([X^a, X^b]X^c) \tag{4.60}$$

となるので f^{abc} は完全反対称である．この記号で

$$\Omega = \sum_{a=1}^{d} J^a J_a = \sum_{a,b=1}^{d} g_{ab} J^a J^b \tag{4.61}$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
[J^c, \Omega] &= \sum_{a=1}^{d} ([J^c, J^a]J_a + J^a[J^c, J_a]) \\
&= \sum_{a,b=1}^{d} (f^{ca}{}_b J^b J_a + J^a f^c{}_{ab} J^b) \\
&= \sum_{a,b=1}^{d} (f^{cab} + f^{cba}) J_a J_b = 0
\end{aligned} \tag{4.62}$$

となり，すなわち，Ω は $\mathfrak{g}$ 不変である．Ω を 2 次の **Casimir 作用素**という．

Ω の最高重み表現 M_λ への作用を調べよう．そのために，$\mathfrak{n}_\pm$ の基底 $e_{\pm\alpha}$ $(\alpha \in \Delta_+)$ を，

$$[h_i, e_\alpha] = (\alpha_i^\vee, \alpha)e_\alpha, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = (\alpha^\vee, h), \quad B(e_\alpha, e_{-\alpha}) = \frac{2}{\alpha^2} \tag{4.63}$$

となるように選ぶ．ただし，$\alpha^\vee = \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i^\vee$ に対して $(\alpha^\vee, h) = \sum_{i=1}^{l} m_i h_i$ と書いた．このとき

$$\begin{aligned}
\Omega &= \sum_{i=1}^{l} h_i h^i + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\alpha^2}{2}(e_\alpha e_{-\alpha} + e_{-\alpha} e_\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^{l} h_i h^i + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \Big((\alpha, h) + \alpha^2 e_{-\alpha} e_\alpha\Big)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

を得る．したがって，重み λ の最高重みベクトル $|\lambda\rangle$ に対して

$$\Omega|\lambda\rangle = (\lambda, \lambda+2\rho)|\lambda\rangle = [(\lambda+\rho)^2 - \rho^2]|\lambda\rangle \tag{4.65}$$

となる．ここで，ρ は

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha \tag{4.66}$$

で定義され，**Weyl ベクトル**とよばれる．なおこれは $(\alpha_i^\vee, \rho) = 1$ を満たす．

最高重み表現 M_λ の重み μ の特異ベクトル $|\mu\rangle$ についても

$$\Omega|\mu\rangle = [(\mu+\rho)^2 - \rho^2]|\mu\rangle \tag{4.67}$$

であるが，Ω の値は M_λ で一定であるから

$$(\lambda+\rho)^2 = (\mu+\rho)^2 \tag{4.68}$$

という関係を得る．

4.5 指 標 公 式

$\mathfrak{g}$ の表現 (ρ, V) において，表現行列 $H_i = \rho(h_i)$ はすべて対角型であるとする．このとき，

$$\mathrm{ch}V = \mathrm{tr}_V(x_1^{H_1}\cdots x_l^{H_l}) \tag{4.69}$$

とおいて，これを表現 (ρ, V) の**指標**という．表現空間 V を h_i の同時固有値 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ によって

$$V = \bigoplus_\mu V(\mu), \qquad V(\mu) = \{v\in V \mid h_i v = \mu_i v\} \tag{4.70}$$

と分解する．このとき指標は，各重み成分 $V(\mu)$ の次元の母関数

$$\mathrm{ch}V = \sum_\mu \dim V(\mu) x_1^{\mu_1}\cdots x_l^{\mu_l} \tag{4.71}$$

となる．したがって，指標で $x_1 = \cdots = x_l = 1$ と特殊化すれば，表現の次元が得られる．

話を具体的にするために，指標を変数 $x_1, \ldots, x_l$ の関数[6)]として導入したのであるが，$\mathfrak{h}$ の和を乗法的に表す記号 e^λ を

$$e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu} \qquad (\lambda, \mu\in\mathfrak{h}) \tag{4.72}$$

6) 和 $\sum_\mu$ の収束性の保証はないので，一般には形式的べき級数である．

により導入し，指標を

$$\mathrm{ch}\, V = \sum_{\mu} \dim V(\mu) e^{\mu} \tag{4.73}$$

と定義することも多い．**基本重み** Λ_i : $(\Lambda_i, \alpha_j^{\vee}) = \delta_{ij}$ に対して，$x_i = e^{\Lambda_i}$ とおけば，$e^{\lambda} = \prod_{i=1}^{l} x_i^{\lambda_i}$ となって (4.71) にもどる．

Verma 表現 M_λ の最高重みベクトル $|\lambda\rangle$ は，その指標 $\mathrm{ch}\, M_\lambda$ に e^{λ} の寄与をする．これに f_α $(\alpha \in \Delta_+)$ を作用させるたびに，指標への寄与は $e^{-\alpha}$ 倍だけずれたものになる．このことから，M_λ の指標は

$$\mathrm{ch}\, M_\lambda = \frac{e^{\lambda}}{\prod_{\alpha\in\Delta_+} (1 - e^{-\alpha})} \tag{4.74}$$

となる．λ が特別な値で特異ベクトルが存在する場合には，特異ベクトルの生成する部分表現からの寄与を除いたものが求める既約表現の指標を与える．

前節の図 4.1 が示すように，表現の重みはルート空間において対称的な分布をする．この対称性は **Weyl 群**によって記述される．一般に，$\mathfrak{h}$ の変換 s_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ を次で定義する．

$$s_i(\lambda) = \lambda - (\alpha_i^{\vee}, \lambda)\alpha_i \tag{4.75}$$

このとき，s_i は α_i に直交する平面での鏡映変換を表し，次が成り立つ．

$$s_i^2 = 1, \qquad (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \tag{4.76}$$

ここに m_{ij} は，Cartan 行列の値 $a_{ij}a_{ji} = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \geq 4$ に応じて $m_{ij} = 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ \infty$ で定まる数である．$s_1, s_2, \ldots, s_l$ を生成元，(4.76) を基本関係式として定義される群

$$W = \langle s_1, \cdots, s_l \mid s_i^2 = 1,\ (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle \tag{4.77}$$

を Cartan 行列 a_{ij} に対する **Weyl 群**という．

可積分表現 L_λ の指標は Weyl 群不変であることを示そう．

証明． 指標は表現空間で $x^h = x_1^{h_1} \cdots x_l^{h_l}$ のトレースをとったものであった．任意の可逆な線形変換 $g : L_\lambda \to L_\lambda$ による共役変換に対してトレースは不変 $\mathrm{tr}_{L_\lambda}(g x^h g^{-1}) = \mathrm{tr}_{L_\lambda}(x^h)$ であるから，

$$s_i(x^h) = r_i x^h r_i^{-1} \tag{4.78}$$

となる作用素 $r_i : L_\lambda \to L_\lambda$ をみつければよい．そのような r_i は，例えば

$$r_i = e^{e_i} e^{-f_i} e^{e_i} \tag{4.79}$$

とすることで実現される．実際，

$$\begin{aligned} e^{e_i} h_j e^{-e_i} &= h_j - a_{ji} e_i = h'_j, \\ e^{-f_i} h'_j e^{f_i} &= h_j - a_{ji} h_i - a_{ji} e_i = h''_j, \\ e^{e_i} h''_j e^{-e_i} &= h_j - a_{ji} h_i \end{aligned} \tag{4.80}$$

であるから，

$$r_i h_j r_i^{-1} = h_j - a_{ji} h_i \tag{4.81}$$

となる．これは $h_i = (\alpha_i^\vee, h)$ を思い出せば求める作用 (4.78) にほかならない．r_i に現れる指数関数が意味をもつために可積分表現の条件が効いていることに注意しよう． □

Weyl 群を用いると，有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の可積分表現 L_λ の指標が次のように表される．

$$\mathrm{ch} L_\lambda = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{|w|} e^{w(\lambda+\rho)}}{e^\rho \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})} \tag{4.82}$$

ここに $|w|$ は w を s_i たちの積で最短表示したときの s_i たちの数を表す．この公式 (4.82) は **Weyl の指標公式**とよばれ，Weyl 群の反対称式の比として対称な指標を与えている．公式 (4.82) の証明は省略するが，(4.82) は，特異ベクトルの現れる重み μ が

$$\mu = w(\lambda + \rho) - \rho \qquad (w \in W) \tag{4.83}$$

で与えられることを意味しており，これが証明の鍵になる (式 (4.68) も参照)．

$\lambda = 0$ の自明な表現については $\mathrm{ch}\, L_0 = 1$ であり，

$$\sum_{w \in W} (-1)^{|w|} e^{w(\rho)} = e^\rho \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha}) \tag{4.84}$$

が得られる．これを**分母公式**とよぶ ($(\alpha_i^\vee, \rho) = 1$ に注意)．

例として，$\mathfrak{g}(A_2)$ で $\lambda = (m, n)$ の場合に指標を書き下すと

$$\mathrm{ch} L_{(m,n)} = \frac{\left(\begin{aligned} & x_1^m x_2^n - x_1^{-m-2} x_2^{m+n+1} - x_1^{m+n+1} x_2^{-n-2} \\ & + x_1^{-m-n-3} x_2^m + x_1^n x_2^{-m-n-3} - x_1^{-n-2} x_2^{-m-2} \end{aligned} \right)}{(1 - x_1^{-2} x_2)(1 - x_1^{-1} x_2^{-1})(1 - x_1 x_2^{-2})} \tag{4.85}$$

となる (ただし $x_i = e^{\Lambda_i}$)．これは表現 $M_{(m,n)}$ における部分表現 $M_{(m',n')}$ の埋

め込みの構造

$$M_{(m,n)} \supset \begin{matrix} M_{(-m-2,m+n+1)} \\ \oplus \\ M_{(m+n+1,-n-2)} \end{matrix} \supset \begin{matrix} M_{(-m-n-3,m)} \\ \oplus \\ M_{(n,-m-n-3)} \end{matrix} \supset M_{(-n-2,-m-2)} \tag{4.86}$$

に対応している．

表現の次元は，指標で $x_i = 1$ と特殊化して得られ

$$\dim L_\lambda = \prod_{\alpha\in\Delta^+} \frac{(\lambda+\rho,\alpha)}{(\rho,\alpha)} \tag{4.87}$$

となる．

指標の具体的計算には，**Demazure** の公式

$$\mathrm{ch} L_\lambda = D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_N}(e^\lambda), \qquad D_i(e^\lambda) = \frac{e^\lambda - e^{s_i(\lambda+\rho)-\rho}}{1-e^{-\alpha_i}} \tag{4.88}$$

が便利である．この D_i は **Demazure 作用素**とよばれ，変数 $x_i = e^{\Lambda_i}$ の関数 $f = f(x_1, \ldots, x_l)$ への作用として書けば

$$D_i f = \frac{s_i(f) - a_i f}{1-a_i}, \quad s_i(x_j) = x_i a_i^{-\delta_{ij}}, \quad a_i = e^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^{l} x_j^{a_{ji}} \tag{4.89}$$

(a_{ij} は Cartan 行列) となる．

列 $i_1, i_2, \ldots, i_N$ は，Weyl 群の最長元 w_0 の最短表示 $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_N}$ に対応する添字の列である．Cartan 行列 (4.16) に対応する有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$ について，最長元 w_0 の最短表示に対応する添字の列は次で与えられる．

A_n	$[1][2][3]\ldots[n]$
B_n, C_n	$[1][2][3]\ldots[n][n-1]'\ldots[2]'[1]'$
D_n	$[1][2][3]\ldots[n-1][n-1]'[n-2]'[n-3]'\ldots[1]'$
E_6	121321432154321632143254363214325436
E_7	121321432154321654321743215432654374321543265437432154326743547
E_8	12132143215432165432176543218543216543276543854321654327654385432165432765438543216543765485432165437654854326543785465 8
F_4	121321323432132343213234
G_2	121212

(4.90)

ここで，$[j]$, $[j]'$ は j 個の添字の列で，

$$[j] = (j, j-1, \ldots, 2, 1),$$

$$[j]' = \begin{cases} (n, n-1, \ldots, n-j+1) & (B_n) \\ (n, n-2, n-3, \ldots, n-j) & (D_n,\ n-j : \text{奇数}) \\ (n-1, n-2, n-3, \ldots, n-j) & (D_n,\ n-j : \text{偶数}). \end{cases} \tag{4.91}$$

実は，$s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ が w_0 の最短表示でない場合にも (4.88) には意味があり，$s_{i_1} \cdots s_{i_N} \left| \lambda \right\rangle$ に $\mathfrak{n}_+$ の元たちを作用させて得られる部分空間 (Demazure 加群) の指標を表している．

4.6 テンソル積

N 個のベクトル空間 V_a $(a = 1, \ldots, N)$ に対して，そのテンソル積 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ は $\prod_{a=1}^{N} \dim V_a$ 次元ベクトル空間であり，V_a の基底を $\left| i_a \right\rangle_a$ $(1 \le i_a \le \dim V_a)$ とすれば $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ の基底として

$$\left| i_1, \ldots, i_N \right\rangle = \left| i_1 \right\rangle_1 \otimes \cdots \otimes \left| i_N \right\rangle_N$$

がとれる．ここで $u_1 \otimes \cdots \otimes u_N \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ は各成分 $u_a \in V_a$ に対して線形 (多重線形) であり，これにより直積空間 $V_1 \times \cdots \times V_N$ 上の任意の多重線形写像は $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ 上の線形写像となるのであった．

各 V_a が Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現であるとき，$\mathfrak{g}$ の $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ へのテンソル積表現 Δ が

$$\Delta(x) = \sum_{a=1}^{N} \rho_a(x) \qquad (x \in \mathfrak{g})$$

により定義される．すなわち

$$\Delta(x) \left| i_1, \ldots, i_N \right\rangle = \sum_{a=1}^{N} \left| i_1 \right\rangle_1 \otimes \cdots \otimes \left\{ \rho_a(x) \left| i_a \right\rangle_a \right\} \otimes \cdots \otimes \left| i_N \right\rangle_N \tag{4.92}$$

となる．ここで $\rho_a(x)$ は V_a における表現である．

もとの表現 V_a が既約であっても，そのテンソル積表現は一般には既約でない．一般に，与えられた表現を既約表現の直和に分解することは基本的問題であり，なかでも，既約表現のテンソル積の分解は，我々の議論において大変重要である．これを説明しよう．

例として $\mathfrak{g}(A_1) = \mathfrak{sl}_2$ を考える．既約表現は L_n, $\dim L_n = n+1$ であった $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. この場合 $L_n \otimes L_m$ $(n \geq m)$ の分解は，左辺の表現の各重み空間の多重度をみることにより，容易に

$$L_n \otimes L_m = L_{n+m} \oplus L_{n+m-2} \oplus L_{n+m-4} \oplus \cdots \oplus L_{n-m} \tag{4.93}$$

がわかる．これを **Clebsch-Gordan 則**とよぶ．量子力学では角運動量の合成則として知られている．とくに

$$L_1 \otimes L_n = L_{n+1} \oplus L_{n-1} \tag{4.94}$$

であるから，これを繰り返せば

$$\begin{aligned} L_1^{\otimes 2} &= L_2 \oplus L_0, \\ L_1^{\otimes 3} &= L_3 \oplus 2L_1, \\ L_1^{\otimes 4} &= L_4 \oplus 3L_2 \oplus 2L_0 \end{aligned} \tag{4.95}$$

などを得る．最後の式は 2 次元表現 L_1 の 4 つのテンソル積の中で自明な表現 L_0 $(e, f, h$ が 0 で作用するもの$)$ が 2 次元あることを意味している．実際 L_1 の基底 $|\,0\,\rangle$, $|\,1\,\rangle$ を $f\,|\,0\,\rangle = |\,1\,\rangle$ となるようにとり，対応する $L_1^{\otimes 4}$ の基底を

$$|\,ijkl\,\rangle = |\,i\,\rangle \otimes |\,j\,\rangle \otimes |\,k\,\rangle \otimes |\,l\,\rangle$$

と表せば，

$$\begin{aligned} &|\,0101\,\rangle - |\,1001\,\rangle - |\,0110\,\rangle + |\,1010\,\rangle = |\,[01]\,[01]\,\rangle, \\ &|\,0011\,\rangle - |\,0101\,\rangle - |\,1010\,\rangle + |\,1100\,\rangle = |\,[0[01]1]\,\rangle \end{aligned} \tag{4.96}$$

がその基底となる ([ ] は反対称化の意味)．さらに

$$\begin{aligned} L_1^{\otimes 5} &= L_5 \oplus 4L_3 \oplus 5L_1, \\ L_1^{\otimes 6} &= L_6 \oplus 5L_4 \oplus 9L_3 \oplus 5L_0 \end{aligned} \tag{4.97}$$

などとなるが，$L_1^{\oplus 6}$ の 5 個の L_0 表現は次のもので張られる．

$$\begin{aligned} &|\,[01]\ [01]\ [01]\,\rangle, \quad |\,[01]\ [0[01]1]\,\rangle, \quad |\,[0[01]1]\ [01]\,\rangle, \\ &|\,[0[01]\ [01]1]\,\rangle, \quad |\,[0[0[01]1]1]\,\rangle. \end{aligned} \tag{4.98}$$

一般に

$$L_1^{\otimes n} = \bigoplus_{k=1}^{\frac{n}{2}} c_{n,k} L_{n-2k} \tag{4.99}$$

であり，係数は二項係数により

$$c_{n,k} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \tag{4.100}$$

と与えられる．この $c_{n,k}$ は **Kostka 数**とよばれる数のもっとも簡単な場合であり，とくに $c_{2n,n} = 1, 1, 2, 5, 14, \ldots$ は **Catalan 数**の名で古くから知られていたらしい[7)]．$c_{n,k}$ は，**Pascal の三角形**を半分にした次のような表から計算できる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & 1 & & 7 \\
 & & & & & 1 & & 6 & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 20 \\
 & & & 1 & & 4 & & 14 & \\
 & & 1 & & 3 & & 9 & & 24 \\
 & 1 & & 2 & & 5 & & 14 & \\
1 & & 1 & & 2 & & 5 & & 14
\end{array} \tag{4.101}$$

(p,q) ミニマル模型の $h = h_{2,1}$ の primary 場の独立な n 点関数の個数は，同様のダイアグラムにおいて，さらに上側も切り取ることにより与えられる．次の図は，$p = 5$ の場合を例示したものである (なお (5.201) も参照)．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 3 & & 8 & \\
 & & 1 & & 3 & & 8 & & 21 \\
 & 1 & & 2 & & 5 & & 13 & \\
1 & & 1 & & 2 & & 5 & & 13
\end{array} \tag{4.102}$$

4.7 カレント代数

3.12.1 項において，いくつかの共形重み 1 の作用素 $J^a(z)$ $(a = 1, \ldots, d)$ のなす OPE

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{k^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f^{ab}{}_c}{z-w} J^c(w) + \cdots \tag{4.103}$$

を考えた[8)]．これは，$J^a_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n J^a(z)\, dz$ の交換関係として表せば

7) R. P. Stanley, A baker's dozen of conjectures concerning plane partitions, Lecture Notes in Math., 1234 (1986) 285–293.

8) 以下，添字 $a, b, c, \ldots$ は $1, \ldots, d$ を表し，これについては Einstein の規約に従い和の記号をしばしば省く．

$$[J^a_m, J^b_n] = k^{ab} m \delta_{m+n,0} + f^{ab}{}_c J^c_{m+n} \tag{4.104}$$

であった．そして，J^a_n ($a = 1, \dots, d,\ n \in \mathbf{Z}$) を生成子とし，交換関係 (4.104) を基本関係式とする Lie 代数を**カレント代数**とよぶのであった．ただし，(4.104) が Lie 代数を定めるためには，反対称性と Jacobi 恒等式を満たさなくてはならない．このために，定数 k^{ab}, $f^{ab}{}_c$ が従うべき条件を調べる．反対称性は

$$k^{ab} = k^{ba}, \qquad f^{ab}{}_c = -f^{ba}{}_c \tag{4.105}$$

と同値である．一方，Jacobi 恒等式が満たされるためには，

$$\begin{gathered} f^{bc}{}_d k^{ad} - f^{ca}{}_d k^{bd} = 0, \\ f^{bc}{}_d f^{ad}{}_e + f^{ca}{}_d f^{bd}{}_e + f^{ab}{}_d f^{cd}{}_e = 0 \end{gathered} \tag{4.106}$$

が条件となる．これらの関係は $f^{ab}{}_c$ がある Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の構造定数で k^{ab} がその不変内積であること，すなわち $\mathfrak{g}$ の適当な基底 J^a により

$$[J^a, J^b] = f^{ab}{}_c J^c, \qquad k^{ab} = kB(J^a, J^b) \tag{4.107}$$

と表されることを意味する．有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ から，このようにして定まるカレント代数を $\widehat{\mathfrak{g}}$ で表す．以下では $B(J^a, J^b) = g^{ab}$ を標準内積に規格化し，そのときの係数 k を**レベル**とよぶ．

1 変数 Laurent 多項式を係数 (要素) とする $\mathfrak{g}$ 行列のなす Lie 代数

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[z, z^{-1}] \tag{4.108}$$

を $\mathfrak{g}$ の**ループ代数**という．これは，単位円周 $z = e^{2\pi i\theta}$ (ループ) 上の $\mathfrak{g}$ 値関数のなす Lie 代数とみてもよい．

$$J^a_n = J^a \otimes z^n \qquad (J^a \in \mathfrak{g},\ n \in \mathbf{Z}) \tag{4.109}$$

とすれば，その交換関係は (4.104) で $k^{ab} = 0$ としたものである．上で示したことより，有限次元単純 Lie 代数のループ代数の中心拡大は不変内積により定まり，したがって 1 次元である．すなわち

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbf{C}k \tag{4.110}$$

を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の定義としてもよい．ここに k は中心で，交換関係は

$$[X \otimes f, Y \otimes g] = [X, Y] \otimes fg + kB(X, Y) \operatorname*{res}_{z=0}(f dg) \tag{4.111}$$

と書くことができる．便宜上，z の次数を数える Euler 作用素 $d = z\dfrac{d}{dz}$ を加えて，$\widehat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbf{C}d$ を，$\mathfrak{g}$ に付随する (非ツイット型) **affine Lie 代数**という．

カレント代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の最高重み表現を考えるために，その三角分解 $\widehat{\mathfrak{n}}_+ \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_+$ を，

$$\widehat{\mathfrak{n}}_+ = \mathfrak{n}_+ \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[z]), \quad \widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbf{C}k, \quad \widehat{\mathfrak{n}}_+ = \mathfrak{n}_- \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[z^{-1}]) \tag{4.112}$$

と定める．すなわち，$n > 0$ について $J^a_{\pm n} \in \widehat{\mathfrak{n}}_\pm$ とし，$n = 0$ の場合は $J^a_0 \in \mathfrak{g}$ とみなして $\mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ に分ける．中心 k は $\widehat{\mathfrak{h}}$ の元とみなす．

$\mathfrak{g}$ の最高ルート θ を $\alpha_i^\vee$ の非負整数一次結合として

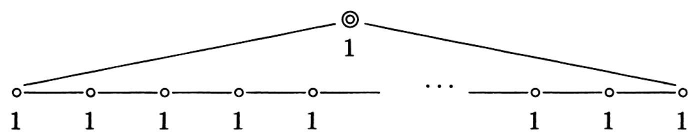
$$\theta^\vee = \sum_{i=1}^{l} a_i^\vee \alpha_i^\vee \tag{4.113}$$

と表したときの係数 $a_i^\vee$ を**コ・ラベル**とよぶ．コ・ラベルの総和

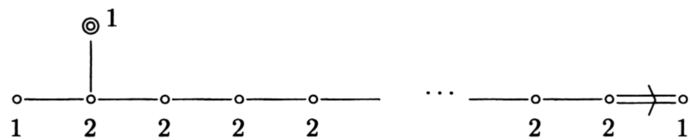
$$h^\vee = \sum_{i=0}^{l} a_i^\vee \tag{4.114}$$

は**双対 Coxeter 数**とよばれる重要な数である．便宜上 $\alpha_0 = -\theta$ とおき，$\mathfrak{g}$ の基本ルート $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ に α_0 を加えたものを**拡大ルート系**とよぶ．以下に，有限型 Dynkin 図形 $A_l, \ldots, G_2$ に対応する**拡大 Dynkin 図形**を示す．ノードの総数は $l+1$ で，$-\theta$ に対応するノードを◎で示した．ノードにつけた添字はコ・ラベルを表す．

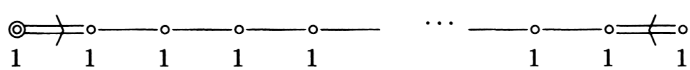
A_l :

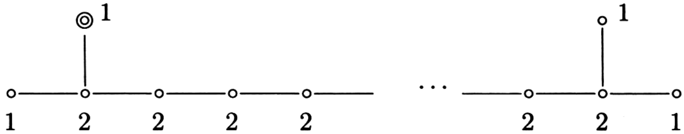


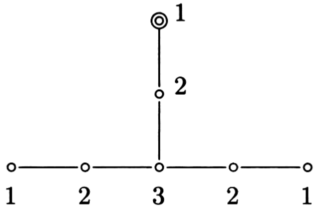
B_l :

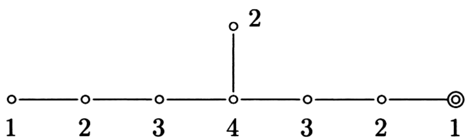


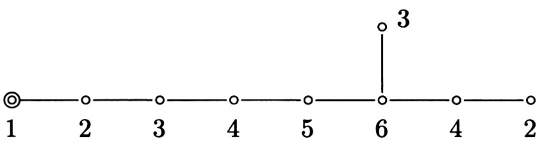
C_l :

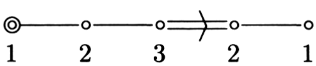


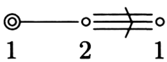
D_l :


E_6 :


E_7 :


E_8 :


F_4 :


G_2 :


$\mathfrak{g}$ に関する基本的なデータは次のとおりである.

	$A_l(\mathfrak{sl}_{l+1})$	$B_l(\mathfrak{so}_{2l+1})$	$C_l(\mathfrak{sp}_{2l})$	$D_l(\mathfrak{so}_{2l})$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
dim	$l(l+2)$	$l(2l+1)$	$l(2l+1)$	$l(2l-1)$	78	133	248	52	14
$h^\vee$	$l+1$	$2l-1$	$l+1$	$2l-2$	12	18	30	9	4

(4.115)

拡大 Dynkin 図形に対応する $l+1$ 次の Cartan 行列 $A = \left(\alpha_i^\vee, \alpha_j\right)_{0 \le i,j \le l}$ は 0 固有値を 1 つだけもつ．重要な点は，“カレント代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ が拡大ルート系に対応

する Kac-Moody 代数とみなせる” ということである．実際，$\mathfrak{g}$ の Chevalley 生成元 e_i, h_i, f_i $(i = 1, \ldots, l)$ は自然に $\widehat{\mathfrak{g}}$ の元とみなせるが，これに加えて

$$e_0 = e_{-\theta} \otimes z, \quad h_0 = k - (\theta^\vee, h), \quad f_0 = e_\theta \otimes z^{-1} \tag{4.116}$$

と選ぶと，$3(l+1)$ 個の元 e_i, h_i, f_i $(0 \leq i \leq l)$ が $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Chevalley 生成子となる．Kac-Moody 代数の中では，もちろん有限次元単純 Lie 代数 (またはその直和) が一番簡単なクラスで，Cartan 行列としては，有限型 (すなわちすべての固有値が正のもの) として特徴づけられる．次に簡単なクラスは Cartan 行列 A が 0 固有値を一つだけもつような場合で，これを affine 型という．対応する $\mathfrak{g}(A)$ を **affine Lie 代数**というが，これは無限次元 Lie 代数の中でも扱いやすく美しい対象である．カレント代数は affine Lie 代数とほぼ同義である[9]．

もっとも簡単な例として $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合をみておこう．$\mathfrak{sl}_2$ の基底を $E = E_{1,2}$, $F = E_{2,1}$, $H = E_{1,1} - E_{2,2}$ ととる．交換関係は

$$[H, E] = 2E, \qquad [H, F] = -2F, \qquad [E, F] = H$$

であり，標準内積はこの表現で $(X, Y) = \mathrm{tr}(XY)$, すなわち $(H, H) = 2$, $(E, F) = 1$ であった．したがって，対応するカレント代数 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ は

$$\begin{aligned}
[H_m, H_n] &= 2km\delta_{m+n,0}, \\
[H_m, E_n] &= 2E_{m+n}, \\
[H_m, F_n] &= -2F_{m+n}, \\
[E_m, F_n] &= H_{m+n} + km\delta_{m+n,0}
\end{aligned} \tag{4.117}$$

となる．OPE で表せば

$$\begin{aligned}
H(z)H(w) &= \frac{2k}{(z-w)^2} + \cdots, \\
H(z)E(w) &= \frac{2}{z-w}E(w) + \cdots, \\
H(z)F(w) &= \frac{-2}{z-w}F(w) + \cdots, \\
E(z)F(w) &= \frac{k}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}H(w) + \cdots
\end{aligned} \tag{4.118}$$

となる．一般に，$\mathfrak{g}$ の Chevalley 生成子 e_i, h_i, f_i に対応するカレントを $E_i(z)$,

9) 素直なカレント代数でない affine Lie 代数もあるが，それらも，カレント代数を Dynkin 図形の自己同型を使って捻った twist 型 affine Lie 代数として実現可能である．

$H_i(z)$, $F_i(z)$ $(i=1,\dots,l)$ とすると

$$\begin{aligned} H_i(z)H_j(w) &= \frac{k(\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee)}{(z-w)^2} + \cdots, \\ H_i(z)E_j(w) &= \frac{a_{ij}}{z-w}E_j(w) + \cdots, \\ H_i(z)F_j(w) &= \frac{-a_{ij}}{z-w}F_j(w) + \cdots, \\ E_i(z)F_j(w) &= \frac{k\delta_{ij}}{(z-w)^2}\frac{2}{\alpha_i^2} + \frac{\delta_{ij}}{z-w}H_j(w) + \cdots \end{aligned} \tag{4.119}$$

が成り立つ.

例えば，自由 boson 場 $\varphi(z)$, $\varphi(z)\varphi(w) = \log(z-w) + \cdots$ の頂点作用素により

$$E(z) = :e^{\sqrt{2}\varphi(z)}:, \quad F(z) = :e^{-\sqrt{2}\varphi(z)}:, \quad H(z) = \sqrt{2}\varphi'(z) \tag{4.120}$$

とおけば，(4.118) の OPE で $k=1$ としたものが成り立つ．これを **Frenkel-Kac 構成**という.

4.8 カレントの相関関数

交換関係 (4.104) にもどって，カレント $J^a(z)$ を次で定義する.

$$J^a(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} J_n^a z^{-n-1} \tag{4.121}$$

$J^a(z)$ の生成作用素部分 $J_+^a(z)$，消滅作用素部分 $J_-^a(z)$ を

$$\begin{aligned} J_+^a(z) &= \sum_{n\geq 0} J_n^a z^{-n-1}, \\ J_-^a(z) &= \sum_{n<0} J_n^a z^{-n-1} \end{aligned} \tag{4.122}$$

とする．$U(1)$ カレントの場合と異なり，$J_+^a(z)$, $J_+^b(w)$ どうしも交換しないことに注意しておく．実際

$$[J_+^a(z), J_+^b(w)] = \sum_{m,n\geq 0} f^{ab}{}_c J_{m+n}^c z^{-m-1} w^{-n-1} \tag{4.123}$$

において，$l = m+n$ とおき，右辺の和を形式的に

$$\sum_{l\geq 0} J_l^c \frac{1}{zw}\left(\frac{1}{z^l}+\frac{1}{z^{l-1}w}+\cdots+\frac{1}{w^l}\right)=-\sum_{l\geq 0} J_l^c \frac{z^{-l-1}-w^{-l-1}}{z-w} \tag{4.124}$$

ととり直せば,

$$[J_+^a(z), J_+^b(w)] = -\frac{f^{ab}{}_c}{z-w}\left(J_+^c(z)-J_+^c(w)\right) \tag{4.125}$$

を得る. $J_-^a(z)$ についても同様である.

$$[J_-^a(z), J_-^b(w)] = \frac{f^{ab}{}_c}{z-w}\left(J_-^c(z)-J_-^c(w)\right) \tag{4.126}$$

これらの式は $z=w$ で正則であることに注意する.

(4.104) に w^{-n-1} をかけて, m で和をとれば

$$[J_m^a, J^b(w)] = k^{ab} m w^{m-1} + f^{ab}{}_c w^m J^c(w) \tag{4.127}$$

を得る. さらに, (4.127) に z^{-n-1} をかけて, $n\geq 0$ にわたって和をとると

$$[J_+^a(z), J^b(w)] = \frac{k^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f^{ab}{}_c}{z-w} J^c(w) \tag{4.128}$$

となる. また, (4.128) と (4.125), (4.126) を組み合わせて

$$\begin{aligned}
[J^a(z), J_-^b(w)] &= \frac{k^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f^{ab}{}_c}{z-w} J^c(z), \\
[J_+^a(z), J_-^b(w)] &= \frac{k^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f^{ab}{}_c}{z-w}\left(J_+^c(z)+J_-^c(w)\right)
\end{aligned} \tag{4.129}$$

が得られる. さらに, (4.128), (4.129) から, 形式的計算により

$$[J^a(z), J^b(w)] = [J_+^a(z) + J_-^a(z), J^b(w)] = 0 \tag{4.130}$$

を得る. すなわち, 積 $J^a(z)J^b(w)$ は可換である.

相関関数を定義するための真空状態を次で定義する.

$$\begin{aligned}
J_n^a \,|\, 0 \,\rangle &= 0 \qquad (n \geq 0), \\
\langle\, 0 \,|\, J_n^a &= 0 \qquad (n < 0).
\end{aligned} \tag{4.131}$$

また, ペアリングは $\langle 0|0\rangle = 1$ とする. これを用いて, 相関関数

$$\left\langle J^{a_1}(z_1)\cdots J^{a_n}(z_n)\right\rangle = \left\langle\, 0 \,\middle|\, J^{a_1}(z_1)\cdots J^{a_n}(z_n) \,\middle|\, 0 \,\right\rangle \tag{4.132}$$

を計算しよう. 計算は以前の $U(1)$ カレントの場合と同様である.

$$\langle\, 0 \,|\, J_-^a(z) = 0, \qquad J_+^a(z) \,|\, 0 \,\rangle = 0$$

に注意し，(4.128) を用いれば

$$
\begin{aligned}
&\left\langle 0 \,\middle|\, J^a(z) J^{a_1}(z_1) \cdots J^{a_n}(z_n) \,\middle|\, 0 \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle 0 \,\middle|\, J^{a_1}(z_1) \cdots [J^a_+(z), J^{a_k}(z_k)] \cdots J^{a_n}(z_n) \,\middle|\, 0 \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle 0 \,\middle|\, J^{a_1}(z_1) \cdots \left\{ \frac{k^{aa_k}}{(z-z_k)^2} + \frac{f^{aa_k}{}_c}{z-z_k} J^c(z_k) \right\} \cdots J^{a_n}(z_n) \,\middle|\, 0 \right\rangle,
\end{aligned}
\tag{4.133}
$$

すなわち，次の漸化式

$$
\begin{aligned}
\left\langle J^a(z) J^{a_1}(z_1) \cdots J^{a_n}(z_n) \right\rangle &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{aa_k}}{(z-z_k)^2} \left\langle J^{a_1}(z_1) \cdots \widehat{J^{a_k}(z_k)} \cdots J^{a_n}(z_n) \right\rangle \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{aa_k}{}_c}{z-z_k} \left\langle J^{a_1}(z_1) \cdots J^c(z_k) \cdots J^{a_n}(z_n) \right\rangle
\end{aligned}
\tag{4.134}
$$

が得られた．ここに $\hat{}$ は，その因子を除くことを意味する．カレントの n 点関数 $\left\langle J^{a_1}(z_1) \cdots J^{a_n}(z_n) \right\rangle$ は，この漸化式と初期値 $\langle 1 \rangle = 1$, $\left\langle J^a(z) \right\rangle = 0$ から計算できる．それらは，次の性質をもつ．

- どの $J^{a_i}(z_i)$, $J^{a_j}(z_j)$ の入れ換えについても対称.
- $z_i = z_j$ に高々 2 位の極をもつ以外は正則.
- $z_i = z_j$ での特異性は，次の OPE で与えられる.

$$
J^{a_i}(z_i) J^{a_j}(z_j) = \frac{k^{a_i a_j}}{(z_i - z_j)^2} + \frac{f^{a_i a_j}{}_b}{z_i - z_j} J^b(z_j) + \cdots \tag{4.135}
$$

小さな n について，いくつか計算してみると

$$
\begin{aligned}
&\left\langle J^{a_1}(z_1) J^{a_2}(z_2) \right\rangle = -\frac{k^{a_1 a_2}}{z_{12} z_{21}}, \\
&\left\langle J^{a_1}(z_1) J^{a_2}(z_2) J^{a_3}(z_3) \right\rangle = -\frac{k^{a_1 a_2 a_3}}{z_{12} z_{23} z_{31}} - \frac{k^{a_1 a_3 a_2}}{z_{13} z_{32} z_{21}}, \\
&\left\langle J^{a_1}(z_1) \cdots J^{a_4}(z_4) \right\rangle = \left[\frac{k^{a_1 a_2}}{z_{12} z_{21}} \frac{k^{a_3 a_4}}{z_{34} z_{43}} + (2\ \text{項}) \right] - \left[\frac{k^{a_1 a_2 a_3 a_4}}{z_{12} z_{23} z_{34} z_{41}} + (5\ \text{項}) \right]
\end{aligned}
\tag{4.136}
$$

などが得られる．ここで $z_{ij} = z_i - z_k$ である．また，k^{ab} を適当な表現行列 X^a によって $k^{ab} = c\,\mathrm{tr}(X^a X^b)$ と表し，その拡張として

$$
k^{a_1 a_2 \cdots a_l} = c\,\mathrm{tr}(X^{a_1} X^{a_2} \cdots X^{a_l})
$$

という記号を用いた.

一般の n 点関数の具体形も同様に求められ，結果は

$$\left\langle J^{a_1}(z_1)\cdots J^{a_n}(z_n)\right\rangle = \sum\prod_{p=1}^{m}\frac{-k^{A_p}}{z_{A_p}} \tag{4.137}$$

とまとめられる．右辺の和は，$\{1,\ldots,n\}$ をいくつかの重複しない部分集合 $I_1, I_2, \ldots, I_m$ に分け，さらに各 p $(1 \le p \le m)$ について，部分集合 I_p から円順列 A_p をつくるすべての方法にわたる．また，和の中の記号は，一つの円順列 $A = (i_1, i_2, \ldots, i_l) = (i_2, \ldots, i_l, i_1)$ に対して $k^A = k^{i_1 i_2 \cdots i_l}$ および $z_A = z_{i_1 i_2} z_{i_2 i_3}\cdots z_{i_l i_1}$ とする.

より具体的な例として，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ でレベル $k=1$ の場合をみておこう．上記の一般公式より

$$\begin{aligned}\left\langle E(z_1)E(z_2)F(w_2)F(w_1)\right\rangle &= \frac{\mathrm{tr}(EF)}{(z_1-w_1)^2}\frac{\mathrm{tr}(EF)}{(z_2-w_2)^2}+\frac{\mathrm{tr}(EF)}{(z_1-w_2)^2}\frac{\mathrm{tr}(EF)}{(z_2-w_1)^2}\\ &\quad-\frac{\mathrm{tr}(EFEF)}{(z_1-w_1)(w_1-z_2)(z_2-w_2)(w_2-z_1)}\\ &\quad-\frac{\mathrm{tr}(EFEF)}{(z_1-w_2)(w_2-z_2)(z_2-w_1)(w_1-z_1)}\end{aligned} \tag{4.138}$$

となる.

一方，Frenkel-Kac の構成 (4.120) に boson の Wick の定理を用いると

$$\left\langle E(z_1)E(z_2)F(w_2)F(w_1)\right\rangle = \frac{(z_1-z_2)^2(w_2-w_1)^2}{(z_1-w_2)^2(z_1-w_2)^2(z_2-w_2)^2(z_2-w_2)^2} \tag{4.139}$$

となる．見かけは異なるが，もちろん両者は等しい.

4.9 primary 場と最高重み表現

点 w にある作用素 $\mathcal{O}(w)$ への J^a_n の作用を

$$\begin{aligned}J^a(z)\mathcal{O}(w) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}}(z-w)^{-n-1}J^a_n\mathcal{O}(w),\\ J^a_n\mathcal{O}(w) &= \oint_w\frac{dz}{2\pi i}(z-w)^n J^a(z)\mathcal{O}(w)\end{aligned} \tag{4.140}$$

で定義する．J^a_n はカレントの交換関係 (4.104) を満たし，とくにゼロモード J^a_0

は有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をなす．

カレント $J^a(z)$ との OPE が

$$J^a(z)\Phi(w) = \frac{X^a}{z-w}\Phi(w) + \cdots \qquad (4.141)$$

で与えられるような作用素 $\Phi(z)$ を考える．J^a_n の作用の定義から

$$\begin{aligned} J^a_0\Phi(w) &= X^a\Phi(w), \\ J^a_n\Phi(w) &= 0 \qquad (n>0) \end{aligned} \qquad (4.142)$$

となる．したがって X^a は $\mathfrak{g}$ の表現であり，$\Phi(z)$ はその表現空間 V に値をとる作用素である．この $\Phi(z)$ を表現 V に対する **primary 場**という．$\Phi(z)$ に J^a_{-n} $(n \geq 0)$ を次々に作用させて得られる作用素たち

$$J^{a_1}_{-n_1}\cdots J^{a_m}_{-n_m}\Phi(z) \qquad (4.143)$$

は，カレント代数 (4.104) の表現空間をなす．$\mathfrak{g}$ の表現 V が可積分表現 L_λ で $\Phi_\lambda(z)$ が最高重みベクトル $|\lambda\rangle$ に対応する primary 場とすると

$$\begin{aligned} e_i\Phi_\lambda(z) &= 0, \\ h_i\Phi_\lambda(z) &= \lambda_i\Phi_\lambda(z) \end{aligned} \qquad (i=0,1,\ldots,l) \qquad (4.144)$$

を満たす．ここで h_0 の定義と (4.113) から

$$k = \sum_{i=0}^{l} a_i^\vee \lambda_i \qquad (a_0^\vee = 1) \qquad (4.145)$$

である．以下，レベル k が固定されている状況では，関係式 (4.145) により $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$ と $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$ を同一視して使う．

affine Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現 $\widehat{L}_\lambda$ も有限次元 Lie 代数の場合と同様に非負整数の重み λ_i に対して定義され，

$$\begin{aligned} e_i|\lambda\rangle &= 0, \\ h_i|\lambda\rangle &= \lambda_i|\lambda\rangle, \qquad (i=0,1,\ldots,l) \\ f_i^{\lambda_i+1}|\lambda\rangle &= 0 \end{aligned} \qquad (4.146)$$

を満たす最高重みベクトル $|\lambda\rangle$ により生成される．$f_i^{\lambda_i+1}|\lambda\rangle = 0$ の条件をはずした場合 (Verma 表現) は $\widehat{M}_\lambda$ と表す．

Euler 作用素 $d = z\dfrac{d}{dz}$ と $J^a_n = J^a \otimes z^n$ の交換関係は $[d, J^a_n] = nJ^a_n$ であるので，J^a_{-n} は d を n だけ下げる作用をする．そこで，$d|\lambda\rangle = 0$ とすると，表現 $\widehat{M}_\lambda$ の指標は

$$\mathrm{tr}_{\widehat{M}_\lambda}(q^{-d}e^h) = e^\lambda \Big(\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^l \prod_{\alpha>0} (1-q^n e^\alpha)(1-q^{n-1}e^{-\alpha}) \Big)^{-1} \tag{4.147}$$

で与えられる．$\hat{\mathfrak{g}}$ についても Weyl の指標公式が成立し，可積分表現 $\widehat{L}_\lambda$ の指標が Verma 表現 $\widehat{M}_\lambda$ の指標の Weyl 群交代和で与えられる (**Weyl-Kac の公式**)．さらに，affine Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ の Weyl 群は $\mathfrak{g}$ の有限 Weyl 群と l 次元格子 $\mathbf{Z}^l$ の半直積という構造になっている．これより，$\mathbf{Z}^l$ 格子の和は**格子テータ関数**

$$\Theta_{\lambda,k} = \sum_{\mu \in kQ^\vee + \lambda} q^{\frac{\mu^2}{2k}} e^\mu \tag{4.148}$$

(ここに $Q^\vee = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\alpha_i^\vee$ は**コ・ルート格子**) にまとめることができて，その有限 Weyl 群 W に関する交代和として指標公式が表される．詳細は省いて結果のみ書いておこう．

$$\chi_\lambda = \frac{\sum_{w\in W} (-1)^{|w|} \Theta_{w(\lambda+\rho),k+h^\vee}}{\sum_{w\in W} (-1)^{|w|} \Theta_{w(\rho),h^\vee}} \tag{4.149}$$

この χ_λ は

$$\mathrm{ch}_\lambda = \mathrm{tr}_{\widehat{L}_\lambda}(q^{-d}e^h) = e^\lambda + \cdots$$

と比べて q のベキに定数のずれがある．すなわち，

$$\chi_\lambda = q^\Delta \mathrm{ch}_\lambda, \qquad \Delta = \frac{(\lambda+\rho)^2}{2(k+h^\vee)} - \frac{\rho^2}{2h^\vee}. \tag{4.150}$$

ここで，Freudenthal-de Vries の**奇妙な公式**とよばれる関係

$$12\rho^2 = h^\vee \dim \mathfrak{g} \tag{4.151}$$

を用いると，このずれを

$$\Delta = \frac{(\lambda, \lambda+2\rho)}{2(k+h^\vee)} - \frac{k \dim \mathfrak{g}}{24(k+h^\vee)} = h_\lambda - \frac{c}{24} \tag{4.152}$$

と書くことができる．次節にみるように，この h_λ, c は共形次元および Virasoro 代数の中心を表す．

Frenkel-Kac 構成による $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ のレベル $k=1$ 表現 (4.120) で，primary 場の例をみておこう．この場合

$$V_\pm(z) = :e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(z)}: \tag{4.153}$$

は $\mathfrak{sl}_2$ の 2 次元表現に対応する primary 場である．実際，カレントとの OPE で特異部をもつのは

$$E(z)V_-(w) = \frac{1}{z-w}V_+(w) + \cdots ,$$
$$F(z)V_+(w) = \frac{1}{z-w}V_-(w) + \cdots , \tag{4.154}$$
$$H(z)V_\pm(w) = \frac{\pm 1}{z-w}V_\pm(w) + \cdots$$

である．$f_1 = F_0$ および $f_0 = E_{-1}$ の作用について

$$f_1^2 V_+(w) = F_0 V_-(w) = 0, \qquad f_0 V_+(w) = 0 \tag{4.155}$$

となるので，最高重み $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) = (0,1)$ の可積分表現 $\widehat{L}_{(0,1)}$ をなすことがわかる．この表現に属する作用素を具体的に書くと

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} & V_1 & V_{-1} & \\ & \varphi' V_1 & \varphi' V_{-1} & \\ V_3 & \varphi'' V_1, \varphi'^2 V_1 & \varphi'' V_{-1}, \varphi'^2 V_{-1} & V_{-3} \end{array} \tag{4.156}$$

などとなる．ここに $V_p = \exp\left(\dfrac{p}{\sqrt{2}}\varphi\right)$ であり，正規積の記号は省いた．$\lambda = (0,1)$ の表現では p は奇数である．一方，$\lambda = (1,0)$ の表現は恒等作用素 $\mathbf{1}$ が最高重みベクトルとなり，その全体は

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} & & \mathbf{1} & & \\ & V_2 & \varphi' & V_{-2} & \\ & \varphi' V_2 & \varphi'', \varphi'^2 & \varphi' V_{-2} & \\ V_4 & \varphi'' V_2, \varphi'^2 V_2 & \varphi''', \varphi''\varphi', \varphi'^3 & \varphi'' V_{-2}, \varphi'^2 V_{-2} & V_{-4} \end{array} \tag{4.157}$$

のように，p が偶数の V_p と φ の微分多項式の正規積により張られる．

これらの表現空間には

$$T(z) = \frac{1}{2} : \varphi'(z)^2 : \tag{4.158}$$

が $c = 1$ の Virasoro 代数として作用し，この下で，カレント $E(z), H(z), F(z)$ および頂点作用素 $V_p(z)$ の次元は 1 および $p^2/4$ となる．

これらの表現の指標は

$$\mathrm{tr}_{\widehat{L}_{(1,0)}}(q^{L_0} x^{H_0}) = \left(\sum_{p \in \text{偶数}} x^p q^{p^2/4} \right) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-1},$$
$$\mathrm{tr}_{\widehat{L}_{(0,1)}}(q^{L_0} x^{H_0}) = \left(\sum_{p \in \text{奇数}} x^p q^{p^2/4} \right) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-1} \tag{4.159}$$

と計算される[10].

一般の ADE 型カレント代数についても，レベル $k=1$ の表現については，頂点作用素を用いた Frenkel-Kac 構成が知られている．

$$H_i(z)=\alpha_i\varphi'(z),\quad E_i(z)=:e^{\alpha_i\varphi(z)}:,\quad F_i(z)=:e^{-\alpha_i\varphi(z)}: \tag{4.160}$$

とおく．$\alpha_i\in\mathfrak{h}$ は $(\alpha_i,\alpha_j)=a_{ij}$ を満たす基本ルートである．$\varphi(z)$ は $\mathfrak{h}$ に値をとる自由 boson 場で，$\alpha\varphi(z)=(\alpha,\varphi(z))$ は内積を表し，OPE は

$$\alpha\varphi(z)\beta\varphi(w)=(\alpha,\beta)\log(z-w)+\cdots \tag{4.161}$$

で与えられる．このとき，

$$\begin{aligned}
H_i(z)H_j(w)&=\frac{a_{ij}}{(z-w)^2}+\cdots,\\
E_i(z)F_j(w)&=\frac{\delta_{ij}}{(z-w)^2}+\frac{\delta_{ij}}{z-w}H_j(w)+\cdots,\\
H_i(z)E_j(w)&=\frac{a_{ij}}{z-w}E_j(w)+\cdots,\\
H_i(z)F_j(w)&=\frac{-a_{ij}}{z-w}F_j(w)+\cdots
\end{aligned} \tag{4.162}$$

が確かめられる．一般のルート α に対応するカレントも，基本的には $:e^{\alpha\varphi(z)}:$ によって与えられる．$\alpha,\beta,\alpha+\beta$ がすべてルートの場合 $(\alpha,\beta)=-1$ となるので，

$$:e^{\alpha\varphi(z)}::e^{\beta\varphi(w)}:=(z-w)^{\alpha\beta}:e^{\alpha\varphi(z)+\beta\varphi(w)}: \tag{4.163}$$

となる．これによると，カレント $:e^{\alpha\varphi(z)}:$ と $:e^{\beta\varphi(z)}:$ から $:e^{(\alpha+\beta)\varphi(z)}:$ を生成する関係式が反交換子になってしまうが，その修正法も知られている[11].

重み格子 $P=\bigoplus_{i=1}^{l}\mathbf{Z}\Lambda_i$ の元の λ でラベルづけされた頂点作用素 $:e^{\lambda\varphi(z)}:$ に $\varphi'(z)$ の微分多項式をかけたもの全体がカレント代数の表現をなす．この表現の指標は

$$\mathrm{tr}_\Lambda(q^{L_0}x_1^{h_1}\cdots x_l^{h_l})=\left(\sum_{\lambda\in P}x^\lambda q^{\lambda^2/2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-l} \tag{4.164}$$

で与えられる．右辺の ( ) 内の和は格子 P に対するテータ関数 (4.148) で $k=1,\lambda=0$ の場合にあたる．簡単のため $x_i=1$ と特殊化すれば，$\sum_{\lambda\in P}q^{\lambda^2/2}$ は長

10) 対応する Weyl-Kac の公式の具体形については 6.2 節を参照.

11) I.B. Frenkel and V.G. Kac, "Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models", Inv. Math. **62** (1980) 23–66.

さ λ^2 の指定された格子ベクトル $\lambda \in P$ を数える母関数である．とくに興味深い例として E_8 の場合を考えると，重み格子 P はルート格子 $Q = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\alpha_i$ に等しく，

$$\sum_{\alpha \in Q} q^{\alpha^2/2} = E_4(q) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1-q^n} = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$$

$$= 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + 30240q^5 + 60480q^6 + \cdots \tag{4.165}$$

となる．ここに $E_4(q)$ は重み 4 の Eisenstein 級数，$\sigma_3(n)$ は n の約数の 3 乗の和である．この結果は E_8 格子の even, self-dual という特性による．

カレント代数の実現の別の例として，自由 fermion の d 成分系 $\psi_i(z)$ $(i = 1, \dots, d)$ を考える．その OPE を

$$\psi_i(z)\psi_j(w) = -\psi_j(w)\psi_i(z) = \frac{\delta_{ij}}{z-w} + \cdots \tag{4.166}$$

と書けば，ストレステンソル

$$T(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} :\psi_i{}'(z)\psi_i(z): \tag{4.167}$$

は $c = d/2$ の Virasoro 代数をなし，$\psi_i(z)$ は $h = 1/2$ の primary 場となる．さらに

$$J_{ij}(z) = :\psi_i(z)\psi_j(z): \tag{4.168}$$

とおくと，$J_{ij} = -J_{ji}$ は共形次元 $h = 1$ の primary 場で

$$J_{ij}(z)\psi_k(w) = \frac{1}{z-w}\Big(\delta_{jk}\psi_i(w) - \delta_{ik}\psi_j(w)\Big) + \cdots,$$

$$J_{ij}(z)J_{kl}(w) = \frac{1}{(z-w)^2}\Big(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}\Big)$$

$$+ \frac{1}{z-w}\Big(\delta_{jk}J_{il}(w) - \delta_{jl}J_{ik}(w) - \delta_{ik}J_{jl}(w) + \delta_{il}J_{jk}(w)\Big) + \cdots \tag{4.169}$$

となる．$J_{ij}(z)$ はカレント代数 $\widehat{\mathfrak{so}}(d)$ (レベル $k = 1$) をなし，$\psi_i(z)$ はそのベクトル表現に対応する primary 場となる．$d = 2l$ の場合 (D_l) は 4 つのレベル $k = 1$ の表現が存在する．このうちの 2 つは ψ_i が NS 表現の場合であって，NS の真空 $\big|0\big\rangle$，すなわち

$$(\psi_i)_\mu \big|0\big\rangle = 0 \qquad (\mu > 0) \tag{4.170}$$

から偶数個および奇数個の fermion の作用で生成される．それぞれ**真空表現** o, **ベクトル表現** v とよぶ．その表現の Virasoro 代数としての指標を計算すると

$$\mathrm{tr}(q^{L_0}) = \frac{1}{2}\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1/2})^d \pm \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-1/2})^d\right] \tag{4.171}$$

となる．

一方，fermion の Ramond 表現も fermion 数の偶奇により 2 つの既約成分に分解し，各々が $\widehat{\mathfrak{so}}(2l)$ の残り 2 個のレベル $k=1$ の表現を与える (**スピノル表現** s と**共役スピノル表現** c)．この場合の Virasoro 指標はどちらも同じで

$$\mathrm{tr}(q^{L_0}) = 2^{d/2-1}q^{d/16}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^d \tag{4.172}$$

となる．ここで $2^{d/2-1}$ は Ramond 表現のゼロモードのなす Clifford 代数

$$\{(\psi_i)_0, (\psi_j)_0\} = \delta_{ij}$$

の既約表現の次元であり，$q^{d/16}$ は Ramond 表現の真空状態の L_0 固有値 $L_0 = 1/16$ を表す．$d=8$ の場合，

$$\frac{1}{2}\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1/2})^8 - \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-1/2})^8\right] = 8q^{1/2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^8 \tag{4.173}$$

が成り立つ．これは $\mathfrak{so}(8)$ の 3 つの 8 次元表現が Dynkin 図形の自己同型により移り合うことからも証明できる．恒等式 (4.173) は 1829 年に Jacobi が発見したものであるが，約 150 年後，超対称弦理論の誕生[12)]において本質的な役目を果たした．

E_8 のレベル $k=1$ の表現は Frenkel-Kac 構成では 8 成分の boson で実現され，$c=8$ の Virasoro 代数の表現になっている．boson-fermion 対応により同じ表現を 16 成分 fermion で構成することもできる．E_8 の 248 次元表現は，部分代数 $D_8 = \mathfrak{so}(16)$ において $(16\times 15)/2 = 120$ 次元表現 v および $2^{16/2-1} = 128$ 次元表現 s に分解する．この実現と boson の実現の指標 (4.164), (4.165) を比較して次の恒等式が得られる．

12) F. Gliozzi, J. Scherk and D. Olive, "Supersymmetry, Supergravity Theories and Dual Spinor Model", Nucl. Phys. **B122** (1977) 253–290.

$$\left(1+240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^n}{1-q^n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-8}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1/2})^{16}+\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-1/2})^{16}\right]+128q\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^{16} \tag{4.174}$$

こうした恒等式も boson-fermion 対応の結果といえなくもないが，むしろこれらの式の保型性が本質的に働いている．affine 指標の保型性については後の章であらためて論ずる (6 章).

4.10 菅原構成

本節では，カレント代数の表現空間に Virasoro 代数が作用することを一般的設定で示す．一般に，カレント $J^a(z)$ と作用素 $\mathcal{O}$ の正規積を

$$:J^a(z)\mathcal{O}: = J^a_-(z)\mathcal{O}+\mathcal{O}J^a_+(z) \tag{4.175}$$

で定義する．すなわち，

$$J^a(z)\mathcal{O}=[J^a_+(z),\mathcal{O}]+:J^a(z)\mathcal{O}: \tag{4.176}$$

である．カレントとカレントの OPE の正則部分 S^{ab} を

$$J^a(z)J^b(w)=\frac{k^{ab}}{(z-w)^2}+\frac{f^{ab}{}_c}{z-w}J^c(w)+S^{ab}(w)+O(z-w) \tag{4.177}$$

と定義する．すなわち，(4.128) と比較すれば

$$S^{ab}(z)=:J^a(z)J^b(z): \tag{4.178}$$

と定義したことになる．

$$:J^a(z)J^b(w):-:J^b(w)J^a(z):=\frac{f^{ab}{}_c}{z-w}\left(J^c(z)-J^c(w)\right) \tag{4.179}$$

なので

$$S^{ab}(z)-S^{ba}(z)=f^{ab}{}_c\frac{\partial}{\partial z}J^c(z) \tag{4.180}$$

となることに注意する．

$J^a(z)$ と $S^{bc}(w)$ の OPE を求めよう．結果は

$$J^a(z)S^{bc}(w) = \frac{kf^{abc}}{(z-w)^3} + \frac{1}{(z-w)^2}\left\{k^{ab}J^c(w) + k^{ac}J^b(w) + J^{[[ab]c]}(w)\right\}$$
$$+ \frac{1}{z-w}\left\{S^{[ab]c}(w) + S^{b[ac]}(w)\right\} + \cdots \tag{4.181}$$

である．ここで，$k^{ab} = kg^{ab}$ とおき，

$$S^{[ab]c} = f^{ab}{}_d S^{dc}, \quad J^{[[ab]c]} = f^{[ab]c}{}_d J^d = f^{ab}{}_p f^{pc}{}_d J^d \tag{4.182}$$

などの記号を用いた[13)]．OPE (4.181) の計算は次のようにする．共形次元の考察から OPE の形はおおよそ決まっているので，(4.181) の各項の係数を決定すればよい．そのために，(4.181) の左辺で $w=0$ とおき，$|\,0\,\rangle$ への作用を考えると

$$S^{bc}(0)\,|\,0\,\rangle = J^a_-(0)J^b(0)\,|\,0\,\rangle = J^a_{-1}J^b_{-1}\,|\,0\,\rangle \tag{4.183}$$

より，

$$J^a(z)S^{bc}(0)\,|\,0\,\rangle = \left(\frac{1}{z^3}J^a_2 + \frac{1}{z^2}J^a_1 + \frac{1}{z}J^a_0 + \cdots\right)J^a_{-1}J^b_{-1}\,|\,0\,\rangle \tag{4.184}$$

となる．そこで，この各項を交換関係によって計算すればよい．例えば，$1/z^2$ の項の係数は

$$[J^a_1, J^b_{-1}J^c_{-1}]\,|\,0\,\rangle = \left\{(k^{ab} + J^{[ab]}_0)J^c_{-1} + J^b_{-1}(k^{ac} + J^{[ac]}_0)\right\}|\,0\,\rangle$$
$$= \left\{k^{ab}J^c_{-1} + k^{ac}J^b_{-1} + J^{[[ab]c]}_{-1}\right\}|\,0\,\rangle \tag{4.185}$$

のように計算される．結果を作用素の言葉で書き直せば求める OPE (4.181) が得られる．

OPE (4.181) において，とくに $S(z) = g_{ab}S^{ab}(z)$ とすれば，

$$J^a(z)S(w) = \frac{1}{(z-w)^2}\left(2k\delta^a_b + f^{ad}{}_c f^c{}_{db}\right)J^b(w) + \cdots$$
$$= \frac{2(k+h^\vee)}{(z-w)^2}J^a(w) + \cdots \tag{4.186}$$

を得る．ここで関係式

$$f^{ad}{}_c f^c{}_{db} = 2h^\vee \delta^a_b \tag{4.187}$$

13) 添字の上下は 4.4 節のように標準内積 (g^{ab}) とその逆行列 (g_{ab}) により行なう．また Einstein の規約により和の記号も省いている．

を用いた．この $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数 (4.114) に一致する．以上をふまえて，ストレステンソル $T(z)$ を

$$T(z) = \frac{1}{2\kappa} : J^a(z) J_a(z) : \qquad (\kappa = k + h^\vee) \tag{4.188}$$

と定義し，これを**菅原構成**という[14)]．(4.186) より，

$$T(z) J^a(w) = \frac{1}{(z-w)^2} J^a(w) + \frac{1}{z-w} J^{a\prime}(w) + \cdots \tag{4.189}$$

となり，$J^a(z)$ は重み 1 のカレントとなる．さらに，

$$T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}$$

で定義される L_n が Virasoro 代数をなすことも確かめておこう．

証明. $T(z)$ の定義 (4.188) より

$$\begin{aligned} 2\kappa L_n &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} g_{ab} : J^a_{n-m} J^b_m : \\ &= g_{ab} \left(\sum_{m<0} J^a_m J^b_{n-m} + \sum_{m \geq 0} J^b_{n-m} J^a_m \right) \end{aligned} \tag{4.190}$$

となるので，これを用いて交換関係 $[L_m, L_n]$ を直接計算してもよい．しかし，次のようにするとより簡明である．得られた OPE (4.189) より

$$[L_n, J^a(z)] = z^n \left(z \frac{\partial}{\partial z} + (n+1) \right) J^a(z) \tag{4.191}$$

であるから

$$[[L_m, L_n] - (m-n) L_{m+n}, J^a(z)] = 0 \tag{4.192}$$

となる．したがって，$[L_m, L_n] - (m-n) L_{m+n}$ は $J^a(z)$ と可換な中心となる．中心は 1 次元であるから，その値 c を決めるだけで十分である．中心 c の値は，3.3 節で示した方法により，正規積

$$\begin{aligned} 2\kappa T(z) &= : J^a(z) J_a(z) : \\ &= \lim_{w \to z} \left(J^a(w) J_a(z) - \frac{k \dim \mathfrak{g}}{(w-z)^2} \right) \end{aligned} \tag{4.193}$$

の 2 形式としての変換則の異常項 (右辺第 2 項から出る) をみて，

$$c = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h^\vee} \tag{4.194}$$

と求められる． □

---

14) カレントの 2 次式でストレステンソルを構成するアイデアは，H. Sugawara, "A Field Theory of Currents", Phys. Rev. **170** (1968) 1659 にはじまる．

4.11 primary 場の相関関数

$\mathfrak{g}$ の表現 L_λ に対して(4.144)で定義された primary 場 $\Phi_\lambda(z)$ を考える．$\Phi_\lambda(w)$ への $T(z)$ の作用は, (4.146) を満たす $\big|\lambda\big\rangle$ への $T(z)$ の作用に対応する．(4.190) より

$$L_n\big|\lambda\big\rangle = 0 \quad (n>0),$$
$$L_0\big|\lambda\big\rangle = \frac{g_{ab}J_0^aJ_0^b}{2\kappa}\big|\lambda\big\rangle = h_\lambda\big|\lambda\big\rangle, \quad h_\lambda = \frac{(\lambda,\lambda+\rho)}{2\kappa} \tag{4.195}$$

となり $\big|\lambda\big\rangle$ は L_n についても最高重みベクトルとなる．そこで以下では，$\Phi_\lambda(z)$ は，Virasoro 代数についても primary 場となるとして，OPE

$$J^a(z)\Phi_\lambda(w) = \frac{\rho_\lambda(J^a)}{z-w}\Phi_\lambda(w)+\cdots,$$
$$T(z)\Phi_\lambda(w) = \frac{h_\lambda}{(z-w)^2}\Phi_\lambda(w)+\frac{1}{z-w}\frac{\partial}{\partial w}\Phi_\lambda(w)+\cdots \tag{4.196}$$

を仮定する．この OPE (4.196) を交換関係に書き直すと

$$[J_n^a,\Phi_\lambda(z)] = \rho_\lambda(J^a)z^n\Phi_\lambda(z),$$
$$[L_n,\Phi_\lambda(z)] = z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z}+h_\lambda(n+1)\right)\Phi_\lambda(z) \tag{4.197}$$

となる．$\Phi_\lambda(z)$ の作用素としての意味は，カレント代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ の適当な表現空間 V_1 から V_2 への L_λ 値作用素で，交換関係 (4.197) を満たすものとして定義する．与えられた V_1, V_2, L_λ に対して，そのような作用素の全体はベクトル空間をなす．重要なのは V_i が可積分表現の場合であるが，ここでの議論はその場合に限らず成立する．

以下では，そのような作用素の N 個の列

$$\Phi_i(z): V_{i-1}\to V_i \qquad (i=1,\ldots,N) \tag{4.198}$$

を考える．各 Φ_i は $\mathfrak{g}$ の (ρ_i, L_{λ_i}) 表現に値をとるとする．その積 (= 作用素としての合成) $\Phi_N(z_N)\cdots\Phi_1(z_1)$ は V_0 から V_N への線形作用素である．とくに，V_0 および V_N^* が，(4.131) を満たす真空状態 $\big\langle 0\big| \in V_N^*$，および $\big|0\big\rangle \in V_0$ を含む場合を考え，これらの状態ではさんだ真空期待値

$$\Psi = \left\langle 0 \,\middle|\, \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_1(z_1) \,\middle|\, 0 \right\rangle \tag{4.199}$$

を考察する．これは $L_{\lambda_N} \otimes \cdots \otimes L_{\lambda_1}$ に値をとる関数である．

真空期待値 Ψ のもっとも基本的な性質として，Ψ の満たす微分方程式を導いてみよう．この方程式は，発見者の名前から **KZ 方程式**とよばれる[15)]．必要な材料は

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi_\lambda(z) = [L_{-1}, \Phi_\lambda(z)], \tag{4.200}$$

$$\kappa L_{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} g_{ab} J^a_{-m-1} J^b_m \tag{4.201}$$

である．まず，(4.200) より

$$\kappa \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial z_i} \Psi = \left\langle 0 \,\middle|\, \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_{k+1}(z_{k+1}) \kappa L_{-1} \Phi_k(z_k) \cdots \Phi_1(z_1) \,\middle|\, 0 \right\rangle \tag{4.202}$$

であり，この右辺は，(4.201) により

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_{ab} \left\langle 0 \,\middle|\, \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_{k+1}(z_{k+1}) J^a_{-m-1} J^b_m \Phi_k(z_k) \cdots \Phi_1(z_1) \,\middle|\, 0 \right\rangle \tag{4.203}$$

となる．この式の J^a_{-m-1} を左へ，J^b_m を右へ交換させていけば

$$\begin{aligned} &\left\langle 0 \,\middle|\, \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_{k+1}(z_{k+1}) J^a_{-m-1} \right. \\ &\qquad = -\sum_{j=k+1}^{N} z_j^{-m-1} \rho_j(J^a) \left\langle 0 \,\middle|\, \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_{k+1}(z_{k+1}) \right., \\ &J^b_m \Phi_k(z_k) \cdots \Phi_1(z_1) \left|\, 0 \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} z_i^m \rho_i(J^b) \Phi_k(z_k) \cdots \Phi_1(z_1) \left|\, 0 \right\rangle \end{aligned} \tag{4.204}$$

であるから，(4.203) は

$$\sum_{j=k+1}^{N} \sum_{i=1}^{k} \left(-\sum_{m=0}^{\infty} z_j^{-m-1} z_i^m \right) g_{ab} \rho_j(J^a) \rho_i(J^b) \Psi = \sum_{j=k+1}^{N} \sum_{i=1}^{k} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j} \Psi \tag{4.205}$$

となる．ここに

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ji} = g_{ab} \rho_i(J^a) \rho_j(J^b) \tag{4.206}$$

とおいた．こうして

15) V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, "Current algebras and Wess-Zumino model in two dimensions", Nucl. Phys. **B248** (1984) 83–103.

$$\sum_{i=1}^{k} \kappa \frac{\partial}{\partial z_i} \Psi = \sum_{j=k+1}^{N} \sum_{i=1}^{k} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j} \Psi \tag{4.207}$$

が得られる．求める KZ 方程式は，これらの差をとったものであり

$$\kappa \frac{\partial}{\partial z_i} \Psi = \sum_{j(\neq i)=1}^{N} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j} \Psi \tag{4.208}$$

と書かれる．

4.12 KZ 方程式の一般的性質

本節では，KZ 方程式 (4.208) をより一般的に考察する．$\Psi = \Psi(z_1, \ldots, z_N)$ をあるベクトル空間 V に値をとる関数として，次の方程式

$$\kappa \frac{\partial}{\partial z_i} \Psi = \sum_{j(\neq i)=1}^{N} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j} \Psi \tag{4.209}$$

を考える．

ここで κ は定数，$\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$ は各々が V に作用する定数行列とする (i, j は行列成分の添字ではない)．一般に，行列値関数 $A_i = A_i(z_1, \ldots, z_N)$ が与えられたとき，方程式系

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \Psi = A_i(z) \Psi \tag{4.210}$$

が (Frobenius の意味で) 可積分であるためには，

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_i} - A_i, \frac{\partial}{\partial z_j} - A_j \right] = 0, \tag{4.211}$$

すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial z_i} A_j - \frac{\partial}{\partial z_j} A_i + [A_i, A_j] = 0 \tag{4.212}$$

が成り立つことが必要十分である．(4.209) の場合には

$$A_i = \sum_{j \neq i} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j} = \frac{\partial}{\partial z_i} \omega, \qquad \omega = \sum_{i<j} \Omega_{ij} \log(z_i - z_j) \tag{4.213}$$

より

$$\frac{\partial}{\partial z_i} A_j - \frac{\partial}{\partial z_j} A_i = 0 \tag{4.214}$$

となっているので，

$$[A_i, A_j] = 0 \tag{4.215}$$

が成り立つことが Frobenius 可積分のための条件となる．陽に書けば

$$\sum_{k(\neq i)} \sum_{l(\neq j)} \frac{[\Omega_{ik}, \Omega_{jl}]}{(z_i - z_k)(z_j - z_l)} = 0. \tag{4.216}$$

これは，$[\Omega_{ik}, \Omega_{jl}] = 0$ であればもちろん満たされるが，実は少し弱めて，

$$\begin{aligned} &[\Omega_{ik}, \Omega_{jl}] = 0 \qquad (i, j, k, l \text{ がすべて異なるとき}), \\ &[\Omega_{ik} + \Omega_{kj}, \Omega_{ij}] = 0 \qquad (i, j, k \text{ がすべて異なるとき}) \end{aligned} \tag{4.217}$$

となることが必要十分である．

証明． 条件式 (4.216) は k, l について $N-1$ 個ずつ計 $(N-1)^2$ 個の和からなるが，$k = j$, $l = i$ の場合は自明に 0 なので，実質は $N(N-2)$ 項からなる．このうち i, j, k, l がすべて異なる $(N-2)(N-3)$ 個の項は相殺する相手がないのでそれ自身で 0 でなければならず，その条件が (4.217) の第 1 式となる．残りの $3(N-2)$ 個の項は $(k, l) = (k, k), (k, i), (j, k)$ $(k \neq i, j)$ となる 3 項ずつにまとめて

$$\frac{[\Omega_{ik}, \Omega_{jk}]}{(z_i - z_k)(z_j - z_k)} + \frac{[\Omega_{ik}, \Omega_{ji}]}{(z_i - z_k)(z_j - z_i)} + \frac{[\Omega_{ij}, \Omega_{jk}]}{(z_i - z_j)(z_j - z_k)} \tag{4.218}$$

となるが，これは恒等式

$$\frac{1}{(z_i - z_k)(z_j - z_k)} = \frac{1}{(z_i - z_k)(z_j - z_i)} + \frac{1}{(z_i - z_j)(z_j - z_k)} \tag{4.219}$$

のおかげで，残りの $N-2$ 個の条件 (4.217) の第 2 式と等価である． □

有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現から，条件 (4.217) を満たす Ω_{ij} が系統的に構成される．実際，この構成で得られる方程式が KZ 方程式 (4.208) であった．すなわち，(ρ_i, V_i) を $\mathfrak{g}$ の表現として

$$V = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_N \tag{4.220}$$

とおき，線形作用素 $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$ を

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{\kappa} \sum_{a=1}^{d} \rho_i(J^a) \rho_j(J_a) \tag{4.221}$$

とすればよい．この場合の一般的性質として，Lie 代数 $(\mathfrak{g})$ 対称性と $SL(2, \mathbf{C})$ 不変性について述べておこう．

Lie 代数対称性：(4.220) のテンソル積表現への $\mathfrak{g}$ の対角作用 Δ は

$$\Delta(J^a)\Psi = \sum_{i=1}^{N} \rho_i(J^a)\Psi \tag{4.222}$$

で与えられた．この対角作用が KZ 方程式を保つことは，Ω の $\mathfrak{g}$ 不変性

$$[\Delta(J^a), \Omega_{ij}] = 0 \tag{4.223}$$

より従う．この $\mathfrak{g}$ 対称性により，テンソル積空間 V を $\Delta(\mathfrak{g})$ によって既約分解し，各既約成分ごとに KZ 方程式を解くことができる．とくに，各既約成分のうちの最高重みベクトルに対応する解が得られれば，他のすべての解は，その解から $\Delta(\mathfrak{g})$ の作用によって得られる．

Ψ が真空期待値 $\Psi = \left\langle 0 \middle| \Phi_N(z_N) \cdots \Phi_1(z_1) \middle| 0 \right\rangle$ として与えられ，bra の真空ベクトル $\left\langle 0 \right|$ が (4.131) より強く，$\left\langle 0 \right| J_0^a = 0$ を満たす場合には，Ψ は $\Delta(\mathfrak{g})$ の自明表現に属し $\mathfrak{g}$ 不変，すなわち $\Delta(J^a)\Psi = 0$ となる．

***SL*(2, C) 不変性**：KZ 方程式 (4.208) は，座標変数 $z_1, \ldots, z_N$ を一斉に並行移動および拡大 (縮小) 変換 $z_i \mapsto w_i = az_i + b$ しても，不変である．また，逆数変換 $z_i \mapsto w_i = \dfrac{1}{z_i}$ については

$$\kappa \frac{\partial}{\partial w_i}\Psi = \sum_{j \neq i} \left(\frac{\Omega_{ij}}{w_i - w_j} - \frac{\Omega_{ij}}{w_i} \right) \Psi \tag{4.224}$$

となる．とくに Ψ が $\Delta(\mathfrak{g})$ 不変，すなわち $\Delta(J^a)\Psi = 0$ の場合には，

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \Omega_{ij} &= \sum_{a=1}^{d} \rho_i(J^a) \sum_{j \neq i} \rho_j(J_a) \\ &= -\sum_{a=1}^{d} \rho_i(J^a J_a) = -\Omega_i \end{aligned} \tag{4.225}$$

を用いて

$$\kappa \frac{\partial}{\partial w_i}\Psi = \sum_{j \neq i} \frac{\Omega_{ij}}{w_i - w_j}\Psi + \frac{\Omega_i}{w_i}\Psi \tag{4.226}$$

となる．そこで，変換 $z_i \mapsto w_i$ とともに

$$\Psi \mapsto \prod_{i=1}^{N} w_i^{-2h_i}\Psi, \qquad h_i = \frac{\Omega_i}{2\kappa} \tag{4.227}$$

とすれば，KZ 方程式はもとと同じ形にもどる．以上より，一般の $SL(2, \mathbf{C})$ 変換

$$z_i \to w_i = \frac{az_i + b}{cz_i + d} \tag{4.228}$$

の下での Ψ の変換則を，

$$\Psi(w_1,\ldots,w_N)\prod_{i=1}^N dw^{h_i}=\Psi(z_1,\ldots,z_N)\prod_{i=1}^N dz^{h_i} \tag{4.229}$$

とすれば，この下で KZ 方程式は不変である．実際，h_i は作用素 $\Phi_i(z_i)$ の共形次元にほかならず，それらの真空期待値である Ψ の $SL(2,\mathbf{C})$ 不変性は，$L_0, L_{\pm1}$ との交換関係からただちに従う．

最後に，$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合について KZ 方程式 (4.208) の簡単な解を求めてみよう．表現としては 2 次元表現のテンソル積

$$V=L_1^{\otimes N},\quad L_1=\mathbf{C}\,\big|\,0\,\big\rangle\oplus\mathbf{C}\,\big|\,1\,\big\rangle \tag{4.230}$$

を考える．基底は a_i を 0 または 1 として

$$\big|\,a_1a_2\cdots a_N\,\big\rangle=\big|\,a_1\,\big\rangle\otimes\big|\,a_2\,\big\rangle\otimes\cdots\otimes\big|\,a_N\,\big\rangle \tag{4.231}$$

ととる．KZ 方程式は，これらの係数についての 2^N 連立系である．これを具体的に書き下すために，この基底での Ω_{ij} の作用を求める．

$$\Omega=\frac{1}{2}HH+EF+FE \tag{4.232}$$

を用いて，$N=2$ の場合，作用は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
\Omega_{12}\,\big|\,11\,\big\rangle&=\frac{1}{2}\,\big|\,11\,\big\rangle,\\
\Omega_{12}\,\big|\,12\,\big\rangle&=-\frac{1}{2}\,\big|\,12\,\big\rangle+\,\big|\,21\,\big\rangle,\\
\Omega_{12}\,\big|\,21\,\big\rangle&=-\frac{1}{2}\,\big|\,21\,\big\rangle+\,\big|\,12\,\big\rangle,\\
\Omega_{12}\,\big|\,22\,\big\rangle&=\frac{1}{2}\,\big|\,22\,\big\rangle.
\end{aligned} \tag{4.233}$$

これより，一般の N で

$$\Omega_{ij}=s_{ij}-\frac{1}{2} \tag{4.234}$$

がわかる．ここに s_{ij} は，テンソル積 $L_1^{\otimes N}$ の i 成分と j 成分の入れ換え作用素である．

$\mathfrak{g}$ 対称性を用いて，既約分解

$$V=L_1^{\otimes N}=L_N\oplus(N-1)L_{N-2}\oplus\cdots \tag{4.235}$$

により，各成分 L_N, $(N-1)L_{N-2}$ の最高重みベクトルに対する解を求めよう．

L_N の場合：L_N の最高重みベクトルは $\big|\,0\cdots0\,\big\rangle$ の定数倍である．解を

$$\Psi(z)=\psi(z)\,\big|\,0\cdots0\,\big\rangle \tag{4.236}$$

とおくと，

$$\Omega_{ij}\left|0\cdots0\right\rangle=\frac{1}{2}\left|0\cdots0\right\rangle$$

となり，KZ 方程式は

$$\kappa\frac{\partial}{\partial z_i}\psi=\sum_{j\neq i}\frac{1/2}{z_i-z_j}\psi \tag{4.237}$$

であり，この解は差積

$$\psi_0=\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\frac{1}{2\kappa}} \tag{4.238}$$

により与えられる．$\Phi\in L_N$ 以外の場合も，解を

$$\Psi=\psi_0\Phi \tag{4.239}$$

の形に求めることにすれば，Φ については，$\Omega_{ij}=s_{ij}-1$ とした KZ 方程式が成り立つ．

L_{N-2} の場合：L_{N-2} の最高重みベクトルとなる KZ 方程式の解を，N 個のベクトル

$$\left|v_1\right\rangle=\left|10\cdots0\right\rangle,\quad \left|v_2\right\rangle=\left|01\cdots0\right\rangle,\ \cdots,\ \left|v_N\right\rangle=\left|0\cdots01\right\rangle \tag{4.240}$$

を用いて，

$$\Phi=\sum_{i=1}^{N}\psi_i(z)\left|v_i\right\rangle,\qquad \sum_{i=1}^{N}\psi_i(z)=0 \tag{4.241}$$

と表そう．KZ 方程式から

$$\kappa\frac{\partial}{\partial z_1}\Phi(z)=\left(\frac{s_{12}-1}{z_1-z_2}+\frac{s_{13}-1}{z_1-z_3}+\cdots+\frac{s_{1N}-1}{z_1-z_N}\right)\Phi(z) \tag{4.242}$$

となる．これと $\left\langle 10\cdots0\right|$ との内積をとって

$$\kappa\frac{\partial}{\partial z_1}\psi_1(z)=\frac{\psi_2-\psi_1}{z_1-z_2}+\frac{\psi_3-\psi_1}{z_1-z_3}+\cdots+\frac{\psi_N-\psi_1}{z_1-z_N}, \tag{4.243}$$

また，$\left\langle 010\cdots0\right|$ との内積をとって

$$\kappa\frac{\partial}{\partial z_1}\psi_2(z)=\frac{\psi_1-\psi_2}{z_1-z_2} \tag{4.244}$$

などが得られる．

これらの方程式には，$N-1$ 個の解があり，積分

$$\psi_i(z)=\int_C dt\prod_{a=1}^{N}(z_a-t)^{-\frac{1}{\kappa}}\frac{1}{z_i-t} \tag{4.245}$$

において積分路 C をいろいろにとることで求められる．この積分が解になるこ

とは，方程式に直接代入して確かめられる．実際，(4.244) はそのまま，(4.243) では，左辺と右辺の差が

$$-\kappa \int_C dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\prod_{a=1}^{N} (z_a - t)^{-\frac{1}{\kappa}} \frac{1}{z_i - t} \right) \tag{4.246}$$

となることから従う．$\sum_{i=1}^{N} \psi_i(z) = 0$ も同様である[16]．

このような積分による KZ 方程式の解の一般的構成を次章で扱う．解法の要点は，性質 (4.196) に従う作用素 $\Phi(z)$ を真空期待値が計算しやすいように，自由場を用いて具体的に構成することである．

16) A. Matsuo, "An application of Aomoto-Gel'fand hypergeometric functions to the $SU(n)$ Knizhnik-Zamolodchikov equation", Comm. Math. Phys. **134** (1990) 65–77.

5章

自由場表現

本章では，有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の微分作用素による表現を基礎として，affine Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の自由場による表現 (脇本表現) を構成する．これを用いて KZ 方程式の解の積分表示 (Schechtman-Varchenko の公式) を導く．また，共形ブロックとモノドロミーについて，具体例とともに説明する．

5.1 脇本表現

次の OPE に従う自由 boson 場 $a(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ を考える．

$$a(z)a(w) = \frac{2\kappa}{(z-w)^2} + \cdots,$$
$$\beta(z)\gamma(w) = \frac{1}{z-w} + \cdots. \tag{5.1}$$

ただし書かれていない OPE はすべて正則とする．$a(z)$ は規格化を変えているが，本質的に (2.6) と同じ boson カレントである．一方，$\beta(z)$, $\gamma(z)$ は，(必要ならば) 交換関係

$$[\beta_m, \beta_n] = [\gamma_m, \gamma_n] = 0, \qquad [\beta_m, \gamma_n] = \delta_{m+n,0} \tag{5.2}$$

に従う β_n γ_n $(n \in \mathbf{Z})$ を用いて

$$\beta(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \beta_n z^{-n-1},$$
$$\gamma(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \gamma_n z^{-n} \tag{5.3}$$

として定義することもできる[1)]．この $\beta\gamma$ の代数は bc 系の boson 的対応物であ

1) ここでの目的のためには $\beta(z)$ および $\gamma(z)$ の共形次元を 1 および 0 とした場合が必要であり，展開式の z のべきは，その場合の習慣に合わせている．以下の計算では OPE が基本であり，交換関係までもどることはない．

り，Wick の定理も bc 系に平行して適応できる (符号がでない分，bc 系よりやさしい).

これより，カレント $E(z)$, $H(z)$, $F(z)$ を次で定める．

$$
\begin{aligned}
E(z) &= \beta(z), \\
H(z) &= -2 : \gamma(z)\beta(z) : + a(z), \\
F(z) &= - : \gamma(z)^2\beta(z) : + \gamma(z)a(z) + k\gamma'(z).
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

ここで，$\kappa = k+2$ とすると，E, H, F は $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ のカレント代数を満たす．すなわち，次の OPE が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
H(z)H(w) &= \frac{2k}{(z-w)^2} + \cdots , \\
H(z)E(w) &= \frac{2}{z-w}E(w) + \cdots , \\
H(z)F(w) &= \frac{-2}{z-w}F(w) + \cdots , \\
E(z)F(w) &= \frac{k}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}H(w) + \cdots .
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

証明. Wick の定理を用いた直接計算による．$H(z)F(w)$ の OPE だけ例として実行してみよう．計算の過程では，式が繁雑になるのを避けるため，作用素の引数の z, w と正規積の記号 : : を省略して，示すべき式を

$$
(-2\gamma\beta + a)\cdot(-\gamma^2\beta + \gamma a + k\gamma') = \frac{-2}{z-w}(-\gamma^2\beta + \gamma a + k\gamma') + \cdots \tag{5.6}
$$

と書く[2]. (5.6) の左辺の展開で生ずる 6 つの項のうち，特異部をもつものは 4 つあって，それぞれ OPE を計算すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
2\gamma\beta\cdot\gamma^2\beta &= -\frac{4}{(z-w)^2}\gamma + \frac{2}{z-w}\gamma^2\beta + \cdots , \\
-2\gamma\beta\cdot\gamma a &= -\frac{2}{z-w}\gamma a + \cdots , \\
-2k\gamma\beta\cdot\gamma' &= -\frac{2k}{(z-w)^2}\gamma - \frac{2k}{z-w}\gamma' + \cdots , \\
a\cdot\gamma a &= \frac{2\kappa}{(z-w)^2}\gamma + \cdots .
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

これらをすべて加えると，求める式 (5.6) を得る．(5.5) の他の式も同様に確かめられ

2) dot 記号 ‘$\cdot$’ の左では z 変数の場の正規積，dot の右および dot のない項では w 変数の場の正規積を表す．

る．なお，これらの計算には，以下の公式が有用である．

$$
\begin{aligned}
\beta\cdot P &= \frac{1}{z-w}P' + \cdots, \\
P\cdot\beta &= -\frac{1}{z-w}P' + \cdots, \\
P\beta\cdot Q\beta &= \frac{-1}{(z-w)^2}P'\cdot Q' + \frac{1}{(z-w)}(P\cdot Q'\beta - P'\beta\cdot Q) + \cdots \\
&= \frac{-1}{(z-w)^2}P'Q' + \frac{1}{z-w}\Big(P''Q\gamma' + (PQ'-P'Q)\beta\Big) + \cdots.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

ここに，P, Q は γ の多項式であり，P' は γ による微分，γ' は w による微分を表す．□

以上の結果はカレント代数 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ を自由 boson で表すもので，**脇本表現**とよばれる[3]．Frenkel-Kac 構成もカレント代数を自由場で表示するものであったが，後者は ADE でレベルが 1 の場合にしか存在しないのに対して，脇本表現は，次節以降にみるように，一般の affine Lie 代数と一般のレベル k に対して適応できる．

脇本表現のカレント $E(z)$, $H(z)$, $F(z)$ に対して，これらを共形重み 1 のカレントとするようなストレステンソル $T(z)$ が

$$
T(z) = :\frac{1}{4\kappa}\left\{a(z)^2 - 2a'(z)\right\} + \beta(z)\gamma'(z): \tag{5.9}
$$

により与えられる．これは，菅原構成からも導かれる．この $T(z)$ に対して，$\beta(z)$, $\gamma(z)$ は重み 1 および 0 の primary 場である．$\varphi(z)$ を $a(z) = \kappa\varphi'(z)$ となる自由 boson 場として，OPE を

$$
\begin{aligned}
\varphi(z)\varphi(w) &= \frac{2}{\kappa}\log(z-w) + \cdots, \\
a(z)e^{\alpha\varphi(w)} &= \frac{2\alpha}{z-w}e^{\alpha\varphi(w)} + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

で与える．その頂点作用素 $:e^{\alpha\varphi(z)}:$ は $T(z)$ に対して重み $\alpha(\alpha+1)/\kappa$ の primary 場となる．以下，正規積の記号 :: はしばしば省略する．

脇本表現においては，カレント $E(z)$, $H(z)$, $F(z)$ に加え，以下に定義する遮蔽カレント $s(z)$ も重要な役割を担う．いま，

$$
s(z) = e^{\alpha\varphi(z)}\beta(z) \tag{5.11}
$$

3) M. Wakimoto, "Fock representation of the algebra $A_1^{(1)}$", Comm. Math. Phys. **104** (1986) 605–609.

とおいて，これと $E(z)$, $H(z)$, $F(z)$ との OPE を計算すると，

$$
\begin{aligned}
E(z)s(w) &= \beta \cdot e^{\alpha\varphi}\beta = 0 + \cdots, \\
H(z)s(w) &= (-2\gamma\beta + a) \cdot e^{\alpha\varphi}\beta = \frac{2+2\alpha}{z-w}e^{\alpha\varphi}\beta + \cdots, \\
F(z)s(w) &= (-\gamma^2\beta + \gamma a + k\gamma') \cdot e^{\alpha\varphi}\beta \\
&= \frac{k-2\alpha}{(z-w)^2}e^{\alpha\varphi} + \frac{2+2\alpha}{z-w}e^{\alpha\varphi}\gamma\beta + \frac{-1}{z-w}ae^{\alpha\varphi} + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

となる．そこで，$\alpha = -1$ とすれば

$$
\begin{aligned}
E(z)s(w) &= 0 + \cdots, \\
H(z)s(w) &= 0 + \cdots, \\
F(z)s(w) &= \kappa\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{z-w}e^{-\varphi}\right) + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

を得る．そこで，**遮蔽カレント** $s(z)$ を

$$
s(z) = e^{-\varphi(z)}\beta(z) \tag{5.14}
$$

と定義し，その積分として，**遮蔽作用素**

$$
Q = \oint s(z)dz \tag{5.15}
$$

を定義すれば，積分の境界項を除いて，Q と $E(z)$, $H(z)$, $F(z)$ が可換となる．同様に，Q は $T(z)$ とも可換である．

5.2 Gauss 分解

脇本表現を $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ 以外に拡張するために，カレントの式 (5.4) の意味から考えてみよう．

行列を (下三角) × (対角) × (上三角) と積に分解することを **Gauss 分解**という．2×2 行列 X では，

$$
X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u & \\ & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.16}
$$

ここに

$$
u = a, \quad x = \frac{b}{a}, \quad y = \frac{c}{a}, \quad v = \frac{ad-bc}{a} \tag{5.17}
$$

であり，$a \neq 0$ ならば，このような分解は一意に定まる．X が $SL(2)$ 行列ならば，$ad-bc=1$ より $v=1/u$ である．

$SL(2)$ 行列 X を

$$X = X(y,u,x) = \begin{bmatrix} 1 & \\ y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & \\ & u^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

と表す．この行列 X に，行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2)$ を右からかけて Gauss 分解すると

$$\begin{aligned} &X(y,u,x)A = X(y',u',x'), \\ &x' = \frac{b+dx}{a+cx}, \quad u' = u(a+cx), \quad y' = y + \frac{c}{u^2(a+cx)} \end{aligned} \tag{5.19}$$

が得られる．(5.19) は，行列 A の X への右からのかけ算の作用を，変数 (y,u,x) の有理変換 $(y,u,x) \mapsto (y',u',x')$ として表したもので，$SL(2)$ の (有理変換としての) 表現を与える．

さて，$SL(2)$ 行列 X の関数 $\psi = \psi(X)$ で次の性質をもつものを考える．

$$\begin{aligned} &\psi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} X\right) = \psi(X), \\ &\psi\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} X\right) = a^{\lambda}\psi(X) \end{aligned} \tag{5.20}$$

すなわち，ψ は，下三角成分にはよらず，対角成分には簡単な依存性をもち，したがって，本質的には上三角成分のみに依存する．そこで，

$$\psi(x) = \psi\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix}\right) \tag{5.21}$$

とおけば，(5.16) を用いて

$$\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^{\lambda}\psi\left(\frac{b}{a}\right) \tag{5.22}$$

となる．この $\psi(x)$ への $A \in SL(2)$ の作用を

$$\rho(A)\psi(x) = \psi\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} A\right) \tag{5.23}$$

で定義する．(5.19) により

$$\rho\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\psi(x) = (a+cx)^{\lambda}\psi\left(\frac{b+dx}{a+cx}\right). \tag{5.24}$$

そこで

$$\begin{aligned}\rho(e^{te})\psi(x) &= \psi(x+t),\\ \rho(e^{th})\psi(x) &= e^{\lambda t}\psi(xe^{-2t}),\\ \rho(e^{tf})\psi(x) &= (1+tx)^{\lambda}\psi\left(\frac{x}{1+tx}\right)\end{aligned}\tag{5.25}$$

を得る．無限小の作用で書けば

$$\begin{aligned}\rho(e^{te}) &= 1+tE+O(t^2), \quad E=\frac{\partial}{\partial x},\\ \rho(e^{th}) &= 1+tH+O(t^2), \quad H=-2x\frac{\partial}{\partial x}+\lambda,\\ \rho(e^{tf}) &= 1+tF+O(t^2), \quad F=-x^2\frac{\partial}{\partial x}+x\lambda\end{aligned}\tag{5.26}$$

が得られる．これらの式で

$$x\to\gamma, \quad \frac{\partial}{\partial x}\to\beta, \quad \lambda\to a \tag{5.27}$$

とよみ換えると，ほとんど脇本表現の式になる．すなわち，脇本表現の由来は，以上のような微分作用素による Lie 代数の表現であり，その基礎は Gauss 分解であることがわかった[4]．

(5.22) が示すように，$\psi(X)$ は，厳密には $x=b/a$ のみの関数ではない．一般に，群 G をその **Borel 部分群** $B_-=$(下三角) × (対角) の作用で割った空間 $B_-\backslash G$ を G の**旗多様体**という．$G=SL(2)$ の場合には，B_- は Riemann 球面 $\mathbf{P}^1$ であり，$x=b/a$ がその非同次座標となる．(5.22) は $X_{11}=a=0$ の場合は使えない．そこで，Weyl 群の互換 $s=\begin{bmatrix} & -1\\ 1 & \end{bmatrix}$ で変換して，新たな関数 $\psi_s(z)$ を

$$\psi_s(z)=\psi\left(\begin{bmatrix}1 & z\\ & 1\end{bmatrix}s\right)=z^{\lambda}\psi\Big(-\frac{1}{z}\Big) \tag{5.28}$$

で定義する．x と $z=1/x$ は Riemann 球面 $\mathbf{P}^1$ の原点近傍 $U=\mathbf{P}^1\setminus\{\infty\}$ および無限遠点近傍 $U_s=\mathbf{P}^1\setminus\{0\}$ の座標である．U において $\psi(x)$ で表され，U_s において $\psi_s(z)$ で表され，共通部分 $U\cup U_s$ で (5.28) に従う対象は $\mathbf{P}^1$ 上の**直線束** $\mathcal{L}_\lambda$ の**切断** (section) とよばれる．共通部分での貼り合わせ方を指定する関数 x^λ が直線束 $\mathcal{L}_\lambda$ を指定している．$\mathbf{P}^1$ 全体で正則な大域正則切断が存在す

4) Gauss 分解による脇本表現，WZW 作用，遮蔽作用素などの関係は，A.Gerasimov, A.Morozov, M.Olshanetsky, A.Marshakov, S.Shatashvili, "Wess-Zumino-Witten model as a theory of free fields" Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990) 2495–2589 において示された．

るのは λ が非負整数のときで，この場合，高々 $\lambda+1$ 次の多項式が大域正則切断を張る．こうして最高重み $\lambda=0,1,2,\ldots$ をもつ既約表現空間が，旗多様体 $B_-\backslash G$ 上の直線束 $\mathcal{L}_\lambda$ の大域正則切断の空間 $H^0(B_-,\mathcal{L}_\lambda)$ として実現された．これは，群 G の表現の幾何学的構成を与える **Borel-Weil 理論** (の代数的な対応物) のもっとも簡単な例である．

5.3 $SL(n)$ への拡張

5.1 節および 5.2 節の内容を一般の $SL(n)$ $(n\geq 2)$ に拡張しよう．n 次正方行列 $X=\left(x_{ij}\right)$ を Gauss 分解して

$$X = X_- X_0 X_+ \tag{5.29}$$

としたときの行列 X_- (下三角)，X_0 (対角)，X_+ (上三角) の各要素は，X の小行列式を用いて具体的に与えられる．

$$\begin{aligned}
X_- &= \left(x^-_{ij}\right), & x^-_{ij} &= \frac{\xi^{1\cdots j-1\,i}_{1\cdots j-1\,j}(X)}{\xi^{1\cdots j}_{1\cdots j}(X)} & &(i>j),\\
X_0 &= \left(x^0_{ij}\right), & x^0_{ij} &= \frac{\xi^{1\cdots i}_{1\cdots i}(X)}{\xi^{1\cdots i-1}_{1\cdots i-1}(X)} & &(i=j),\\
X_+ &= \left(x^+_{ij}\right), & x^+_{ij} &= \frac{\xi^{1\cdots i-1\,i}_{1\cdots i-1\,j}(X)}{\xi^{1\cdots i}_{1\cdots i}(X)} & &(i<j).
\end{aligned} \tag{5.30}$$

ここで，順序つき添字集合 $I=\{i_1\cdots i_k\}$, $J=\{j_1\cdots j_k\}$ について

$$\xi^I_J(X) = \xi^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}(X) = \det\left(x_{i_a,j_b}\right)_{1\leq a,b\leq k} \tag{5.31}$$

は $X=\left(x_{ij}\right)$ の k 次の小行列式を表している．

X を次のような上三角行列とする．

$$X = 1+\sum_{i<j} x_{ij}E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 1 & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

生成子 $\ell\in\mathfrak{gl}_n$ の微分作用素表現を求めるために，X に右から行列 $1+t\ell$ をかけて Gauss 分解し，その上三角部分を $X'=1+\sum_{i<j} x'_{ij}E_{i,j}$ とする．このと

き，式 (5.30) より次が確かめられる．

$\ell = e_k = E_{k,k+1}$ の場合：

$$\begin{aligned} X(1+tE_{k,k+1}) &= X', \\ x'_{i,j} &= x_{i,j} + t\big(\delta_{j,k+1}(\delta_{i,k} + x_{i,k})\big). \end{aligned} \tag{5.33}$$

$\ell = E_{k,k}$ の場合：

$$\begin{aligned} X(1+tE_{k,k}) &= (1+tE_{k,k})X', \\ x'_{ij} &= x_{i,j} + t\left(\delta_{jk} - \frac{1}{1+t}\delta_{ik}\right)x_{i,j}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

$\ell = f_k = E_{k+1,k}$ の場合：

$$\begin{gathered} X(1+tE_{k+1,k}) = (1+tuE_{k+1,k})\big(1+tx_{k,k+1}(E_{k,k} - uE_{k+1,k+1})\big)X', \\ x'_{i,j} = x_{i,j} + t\big(\delta_{j,k}x_{i,k+1} - \delta_{i,k}ux_{k,k+1}x_{k,j} + \delta_{i,k+1}(x_{k,k+1}x_{k+1,j} - x_{k,j})\big), \\ u = (1+tx_{k,k+1})^{-1}. \end{gathered} \tag{5.35}$$

$SL(2)$ の場合の式 (5.20) を拡張して，$SL(n)$ 行列 X の関数 ψ で，下三角行列の左作用で不変であり，

$$\psi(a^{h_i}X) = a^{\lambda_i}\psi(X) \qquad (h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1})$$

を満たすものを考える．式 (5.32) の行列 X に対して，その $n(n-1)/2$ 個の上三角成分 $x = (x_{1,2}, \ldots, x_{n-1,n})$ の関数を $\psi(x) = \psi(X)$ とおき，そこへの $\ell \in \mathfrak{sl}_n$ の作用 ρ を

$$\rho(\ell)\psi(x) = \frac{d}{dt}\psi(X(1+t\ell))\Big|_{t=0} \tag{5.36}$$

で定める．$E_k = \rho(e_k)$, $H_k = \rho(h_k)$, $F_k = \rho(f_k)$ について，Gauss 分解の公式 (5.33), (5.34), (5.35) より，次が得られる．

$$\begin{aligned} E_l &= \beta_{l,l+1} + \sum_{i=1}^{l-1} \gamma_{i,l}\beta_{i,l+1}, \\ H_l &= \sum_{i<j}(\delta_{j,l} - \delta_{j,l+1} - \delta_{i,l} + \delta_{i,l+1})\gamma_{i,j}\beta_{i,j} + a_l, \\ F_l &= \sum_{i=1}^{l} \gamma_{i,l+1}\beta_{i,l} - \sum_{j=l+1}^{n} \gamma_{l,l+1}\gamma_{l,j}\beta_{l,j} \\ &\quad + \sum_{j=l+2}^{n}(\gamma_{l,l+1}\gamma_{l+1,j} - \gamma_{l,j})\beta_{l+1,j} + \gamma_{l,l+1}a_l. \end{aligned} \tag{5.37}$$

ただし,

$$x_{i,j} \to \gamma_{i,j}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \to \beta_{i,j}, \qquad \lambda_i \to a_i \tag{5.38}$$

とおいた.(5.37) は,カレント代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ の脇本表現の種になる公式である.実際,$a_i, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}$ を,OPE

$$\begin{aligned} \beta_{i,j}(z)\gamma_{r,s}(w) &= \frac{1}{z-w}\delta_{i,r}\delta_{j,s} + \cdots, \\ a_i(z)a_j(w) &= \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{(z-w)^2} + \cdots \end{aligned} \tag{5.39}$$

に従う自由 boson 場として,F_l に補正項 $(k+l-1)\gamma'_{l,l+1}$ を加えることにより,(5.37) の E_l, H_l, F_l は $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ レベル k のカレント代数を満たすことが知られている[5)].

一般の $SL(n)$ 行列を Gauss 分解した座標は,もとの行列要素の有理式であるから,分母が 0 になるところを扱うためには別の座標に移る必要がある.Borel 部分群の左作用 (ある行を下の行に加えること,およびある行を何倍かする操作) と,適当な置換行列 σ の右作用 (列の入れ換え操作) によって,任意の $SL(n)$ 行列 X を標準形 (5.32) に直すことができる.各置換行列 σ に対して,$X\sigma$ を標準形 (5.32) に直した際の成分 (x_{ij}) を座標とする座標近傍 $U_\sigma = \mathbf{C}^{n(n-1)/2}$ を考えると,旗多様体はこれらの貼り合わせとして記述できる.

はじめに考えた関数 ψ の,座標近傍 U_σ での表示は,(5.32) に対して

$$\psi_\sigma(x_{ij}) = \psi(X\sigma) \tag{5.40}$$

という $n(n-1)/2$ 変数 x_{ij} $(i<j)$ の関数である.異なる座標近傍での ψ_σ の貼り合わせをみるために,上三角行列への互換の作用を調べよう.例として $n=4$ で互換 $s_2 = (2,3)$ の場合について計算する.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 1 & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{13} & -x_{12} & x_{14} \\ 0 & x_{23} & -1 & x_{24} \\ 0 & 1 & 0 & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

5) B. Feigin and E. Frenkel, "Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds", Comm. Math. Phys. **128** (1990) 161–189.

であるので，これを Gauss 分解すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_{23}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{13} & -x_{12} & x_{14} \\ 0 & 1 & -x_{23}^{-1} & -x_{24}x_{23}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & x_{23}x_{34}-x_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.42}$$

したがって

$$\begin{aligned} &\psi_{s_2\sigma}(x_{12},x_{13},x_{14},x_{23},x_{24},x_{34}) \\ &\quad = {x_{23}}^{\lambda_2}\psi_\sigma\left(x_{13},-x_{12},x_{14},-\frac{1}{x_{23}},-\frac{x_{24}}{x_{23}},x_{23}x_{34}-x_{24}\right). \end{aligned} \tag{5.43}$$

一般の場合も同様で，U_σ と $U_{s_k\sigma}$ の貼り合わせは次で与えられる．

$$\psi_{s_k\sigma}(x_{ij}) = {x_{k,k+1}}^{\lambda_k}\psi_\sigma(s_k(x_{ij})) \tag{5.44}$$

ここに，互換 s_k の座標 $x_{i,j}$ への作用は

$$\begin{aligned} &s_k(x_{i,k}) = x_{i,k+1}, \quad s_k(x_{i,k+1}) = -x_{i,k} \quad (i<k), \\ &s_k(x_{k,j}) = -\frac{x_{k,j}}{x_{k,k+1}}, \quad s_k(x_{k+1,j}) = x_{k,k+1}x_{k+1,j} - x_{k,j} \quad (j>k+1), \\ &s_k(x_{k,k+1}) = -\frac{1}{x_{k,k+1}}, \quad s_k(x_{i,j}) = x_{i,j} \quad (i,j\neq k,k+1) \end{aligned} \tag{5.45}$$

で与えられる．

得られた貼り合わせの式の応用として，大域正則切断を特徴づける微分方程式を導いてみよう．例として $n=4$ の場合の式 (5.43) から，ψ_σ が多項式のとき $\psi_{s_2\sigma}$ も多項式となる条件を求める．

$$\begin{aligned} &g(x_{12},x_{13},x_{14},x_{23},x_{24},x_{34}) = \psi_\sigma(x_{12},x_{13},x_{14},x_{23},x_{24}-x_{23}x_{34},x_{34}), \\ &\psi_\sigma(x_{12},x_{13},x_{14},x_{23},x_{24},x_{34}) = g(x_{12},x_{13},x_{14},x_{23},x_{24}+x_{23}x_{34},x_{34}) \end{aligned} \tag{5.46}$$

とすると，ψ_σ が多項式であることと g が多項式であることは同値である．(5.43) は g を使えば

$$\begin{aligned} &\psi_{s_2\sigma}(x_{12},x_{13},x_{14},x_{23},x_{24},x_{34}) \\ &\quad = {x_{23}}^{\lambda_2}\psi_\sigma\left(x_{13},-x_{12},x_{14},-\frac{1}{x_{23}},-\frac{x_{24}}{x_{23}},x_{23}x_{34}-x_{24}\right) \\ &\quad = {x_{23}}^{\lambda_2}g\left(x_{13},-x_{12},x_{14},-\frac{1}{x_{23}},-x_{34},x_{23}x_{34}-x_{24}\right) \end{aligned} \tag{5.47}$$

となるので，g が多項式となるための条件は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{23}}\right)^{\lambda_2+1} g(x)=0 \tag{5.48}$$

となる．これを関数 ψ_σ について書き直せば

$$S_2{}^{\lambda_2+1}\psi_\sigma(x)=0, \qquad S_2=\frac{\partial}{\partial x_{23}}+x_{34}\frac{\partial}{\partial x_{24}} \tag{5.49}$$

が得られる．

一般の $SL(n)$ の場合も同様であって，すべての座標近傍 U_σ で ψ_σ が多項式となるための必要十分条件は，$\sigma=1$ における多項式 $f(x)=\psi_1(x_{ij})$ が

$$S_i{}^{\lambda_i+1}f(x)=0 \qquad (1\le i\le n-1) \tag{5.50}$$

を満たすことである．ここに，S_i は次で与えられる微分作用素

$$S_i=\frac{\partial}{\partial x_{i,i+1}}+\sum_{j=i+2}^{n}x_{i+1,j}\frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \tag{5.51}$$

である．λ_i がすべて非負整数の場合，条件 (5.50) の解空間は最高重み $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})$ に対する $\mathfrak{sl}_n$ の既約表現空間となる．

5.4 カレントの構成

$\mathfrak{sl}_n$ の場合をさらに一般化して，任意の有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，その微分作用素表現を考え，対応するカレント代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現を構成しよう[6]．L_λ を $\mathfrak{g}$ の最高重み λ の既約表現空間とする．任意のベクトル $\left|v\right\rangle\in L_\lambda$ に対して，次の行列要素を考える．

$$\left\langle\lambda\right|e^X\left|v\right\rangle, \qquad X=\sum_{\alpha>0}x^\alpha e_\alpha \tag{5.52}$$

行列要素 $\left\langle\lambda\right|e^X\left|v\right\rangle$ は x^α の多項式である．$\left\langle\lambda\right|$ は，右からの $\mathfrak{n}_-$ の作用で消え，$\mathfrak{h}$ の作用については固有ベクトルであるから，行列要素 $\left\langle\lambda\right|e^X\left|v\right\rangle$ は前節の関数 $\psi(X)$ の性質をもつ．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の任意の元 ℓ に対して

$$L\left\langle\lambda\right|e^X=\left\langle\lambda\right|e^X\ell \tag{5.53}$$

を満たす x の微分作用素 L が定まる．L は $\ell\in\mathfrak{g}$ の微分作用素による表現を与

6) K. Ito and S. Komata, "Feigin-Fuchs representations of arbitrary affine Lie algebras", Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 581–589 の方法による．

える．$\ell = e_i, h_i, f_i$ に対する $L = E_i, H_i, F_i$ を計算してみよう．計算は $e^X e^{t\ell}$ の Gauss 分解

$$\exp(X)\exp(te_i) = \exp\Big(X + t\sum_\alpha E_i^\alpha(x)e_\alpha + O(t^2)\Big),$$
$$\exp(X)\exp(th_i) = \exp(th_i)\exp\Big(X + t\sum_\alpha H_i^\alpha(x)e_\alpha + O(t^2)\Big),$$
$$\exp(X)\exp(tf_i) = \exp(tf_i)\exp(th_i x^{\alpha_i})\exp\Big(X + t\sum_\alpha F_i^\alpha(x)e_\alpha + O(t^2)\Big) \tag{5.54}$$

により定まる多項式 $E_i^\alpha(x), H_i^\alpha(x), F_i^\alpha(x)$ を用いて，

$$\begin{aligned} E_i &= \sum_{\alpha>0} E_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \\ H_i &= \sum_{\alpha>0} H_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \lambda_i, \\ F_i &= \sum_{\alpha>0} F_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \lambda_i x^{\alpha_i} \end{aligned} \tag{5.55}$$

で与えられる．多項式 $E_i^\alpha(x), H_i^\alpha(x), F_i^\alpha(x)$ の具体形は

$$\begin{aligned} E_i^\alpha &= \delta_{\alpha_i}^\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\gamma>0} f_{\alpha_i\gamma}{}^\alpha x^\gamma + O(x^2), \\ H_i^\alpha &= -(\alpha_i^\vee, \alpha)x^\alpha, \\ F_i^\alpha &= -\sum_{\gamma>0} f_{-\alpha_i\gamma}{}^\alpha x^\gamma - \frac{1}{2}(\alpha_i^\vee, \alpha)x^{\alpha_i}x^\alpha + O(x^3) \end{aligned} \tag{5.56}$$

のようになる．

以下の議論では，もう一つの微分作用素 S_i が重要な働きをする．これは左からの e_i の作用

$$S_i\langle\,\lambda\,|\,e^X = \langle\,\lambda\,|\,e_i e^X \tag{5.57}$$

を表すもので，具体形は

$$\begin{aligned} \exp(te_i)\exp(X) &= (\exp(-X)\exp(-te_i))^{-1} \\ &= \exp\Big(X + t\sum_\alpha E_i^\alpha(-x)e_\alpha + O(t^2)\Big) \end{aligned} \tag{5.58}$$

に注意すれば

$$S_i = \sum_{\alpha>0} E_i^\alpha(-x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{5.59}$$

で与えられる．Gauss 分解の式 (5.54) を t で微分して

$$\begin{aligned} e^X e_i &= E_i e^X, \\ e^X h_i &= (h_i - \lambda_i + H_i)e^X, \\ e^X f_i &= (f_i + (h_i - \lambda_i)x^{\alpha_i} + F_i)e^X, \\ e_i e^X &= S_i e^X \end{aligned} \tag{5.60}$$

を得る．これより次が従う．

$$\begin{aligned} [E_i, S_j] &= 0, \\ [H_i, S_j] &= a_{ij}S_j, \\ [F_i, S_j] &= a_{ij}x^{\alpha_i}S_j - \lambda_i\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{5.61}$$

例えば，最後の式は

$$\begin{aligned} F_iS_j\langle \lambda | e^X &= F_i\langle \lambda | e_j e^X \\ &= \langle \lambda | e_j\Big((-f_i - (h_i - \lambda_i)x^{\alpha_i})e^X + e^X f_i\Big) \\ &= -\delta_{ij}\lambda_i\langle \lambda | e^X + a_{ij}x^{\alpha_i}\langle \lambda | e_j e^X + \langle \lambda | e_j e^X f_i \\ &= (-\delta_{ij}\lambda_i + a_{ij}x^{\alpha_i}S_j)\langle \lambda | e^X + S_jF_i\langle \lambda | e^X \end{aligned} \tag{5.62}$$

のように示される．条件 (5.50) を満たす多項式の空間を H_λ とすると，H_λ は (5.55) の作用で $\mathfrak{g}$ の表現となり，$1 \in H_\lambda$ が最高重みベクトルとなる．$|v\rangle \in L_\lambda$ に $P(x) = \langle \lambda | e^X | v \rangle \in H_\lambda$ を対応させることにより，H_λ は既約表現空間 L_λ に同型である．

以上のようにして得られた微分作用素を用いて，$\widehat{\mathfrak{g}}$ のカレントを構成しよう．材料として，自由 boson 場 $\beta_\alpha(z)$, $\gamma^\alpha(z)$ $(\alpha \in \Delta_+)$, および $\mathfrak{h}$ に値をとる自由 boson 場 $\varphi(z)$ を用意する．φ の成分を $\varphi_i = (\alpha_i^\vee, \varphi)$ $(i = 1, \ldots, l)$ と表し，$\beta_\alpha(z)$, $\gamma^\alpha(z)$, $\varphi_i(z)$ の OPE を次で与える．

$$\begin{aligned} \beta_\alpha(z)\gamma^\beta(w) &= \frac{\delta_\alpha^\beta}{z-w} + \cdots, \\ \gamma^\alpha(z)\beta_\beta(w) &= -\frac{\delta_\beta^\alpha}{z-w} + \cdots, \\ \varphi_i(z)\varphi_j(w) &= \frac{b_{ij}}{\kappa}\log(z-w) + \cdots. \end{aligned} \tag{5.63}$$

ここで，$b_{ij}=(\alpha_i^\vee,\alpha_j^\vee)$ は $\mathfrak{h}$ の標準内積であり，κ は定数で，後に $\kappa=k+h^\vee$ ととる．また

$$a_i(z)=\kappa\varphi_i'(z)=\kappa\alpha_i^\vee\varphi'(z) \tag{5.64}$$

とおくと

$$\begin{aligned} a_i(z)a_j(w) &= \frac{\kappa b_{ij}}{(z-w)^2}+\cdots, \\ a_i(z):e^{\lambda\varphi(w)}: &= \frac{(\alpha_i^\vee,\lambda)}{z-w}:e^{\lambda\varphi(w)}:+\cdots \end{aligned} \tag{5.65}$$

となる．ここで，指数の $\lambda\varphi$ は $\mathfrak{h}$ の内積 (λ,φ) の意味である．

x^α $(\alpha\in\Delta_+)$ の多項式全体を $\mathbf{C}[x]$ とする．与えられた多項式 $V^\alpha(x)$, $W^i(x)$, $A_\alpha(x)\in\mathbf{C}[x]$ に対して，次の形の作用素

$$J(z)=:V^\alpha\bigl(\gamma(z)\bigr)\beta_\alpha(z)+W^i\bigl(\gamma(z)\bigr)a_i(z)+A_\alpha\bigl(\gamma(z)\bigr)\gamma^{\alpha\prime}(z): \tag{5.66}$$

を考える．このような 2 つの作用素

$$J_s=:V_s^\alpha\beta_\alpha+W_s^ia_i+A_\alpha^s\gamma^{\alpha\prime}: \qquad (s=1,2) \tag{5.67}$$

に対して，これらの OPE を計算すると

$$J_1(z)J_2(w)=\frac{:K(\gamma(w)):}{(z-w)^2}+\frac{J(w)}{z-w}+\cdots \tag{5.68}$$

となる．ここで $K(x)$ は次で与えられる x の多項式

$$K=-(\partial_\beta V_1^\alpha)(\partial_\alpha V_2^\beta)+\kappa b_{ij}W_1^iW_2^j+V_1^\alpha A_\alpha^2+A_\alpha^1V_2^\alpha \tag{5.69}$$

であり，また $J(w)$ は，やはり (5.66) の形をしていて，係数の多項式は，それぞれ，

$$\begin{aligned} V^\alpha &= V_1^\beta\partial_\beta V_2^\alpha-V_2^\beta\partial_\beta V_2^\alpha, \\ W^i &= V_1^\beta\partial_\beta W_2^i-V_2^\beta\partial_\beta W_1^i, \\ A_\sigma &= V_1^\beta\partial_\beta A_\sigma^2-V_2^\beta\partial_\beta A_\sigma^1+K_\sigma, \\ K_\sigma &= -(\partial_\sigma\partial_\beta V_1^\alpha)\partial_\alpha V_2^\beta+\kappa b_{ij}(\partial_\sigma W_1^i)W_2^j+(\partial_\sigma V_1^\alpha)A_\alpha^2+(\partial_\sigma A_\alpha^1)V_2^\alpha \end{aligned} \tag{5.70}$$

と与えられる．K_σ は，(5.68) の $(z-w)^{-2}$ の係数に含まれる場 γ のうち，$J_1(z)$

からきたもの (もともとは $\gamma(z)$ であった) を，

$$\gamma(z) = \gamma(w) + (z-w)\gamma'(w) + \cdots$$

と展開したことにより，$(z-w)^{-1}$ の項へ「落ちこぼれてきた」項である．

有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の元 l に対して，対応する微分作用素表現

$$L = V^{\alpha}(x)\partial_{\alpha} + W^{i}(x)\lambda_{i} \tag{5.71}$$

を考え，この式に現れる多項式 V_{α}, W^{i} を用いて対応するカレント $J(z)$ をつくると，K および K_{σ} の項を除けば，求めるカレント代数の OPE の形をしている．そこで問題は，残りの係数 A_{α} をうまくとって，正しいカレント代数の OPE になるように整形することである．その議論のため，少々の準備をしておこう．

上記の作用素 J_1, J_2 の OPE (5.68) の $(z-w)^{-2}$，および $(z-w)^{-1}$ の係数に現れる作用素を

$$K = (J_1, J_2), \qquad J = [J_1, J_2] \tag{5.72}$$

と表そう．(,), [,] は，どちらも J_1, J_2 について線形であり，

$$\begin{aligned}
&(A,B) = (B,A),\\
&[A,B] + [B,A] = (A,B)',\\
&([A,B],C) + (B,[A,C]) = [A,(B,C)],\\
&[[A,B],C] + [B,[A,C]] = [A,[B,C]]
\end{aligned} \tag{5.73}$$

が成り立つ．

証明． これらは K,J の式から直接示すこともできるが，OPE 係数としてのそれらの定義

$$A(x)B(y) = \frac{1}{(x-y)^2}(A,B)(y) + \frac{1}{x-y}[A,B](y) + \cdots \tag{5.74}$$

から，より一般的に示す方が簡明である．

初めの二つの式は，可換性

$$A(x)B(y) = B(y)A(x) \tag{5.75}$$

の帰結である．後の二つの式は，可換性と結合律を用いて

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dx}{2\pi i} A(x)B(y)C(z) \tag{5.76}$$

を 2 通りに計算して得られる．ここに Γ は $x = y, z$ を含む閉じた経路とする．まず，

$B(y)C(z)$ の OPE を用いて,

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dx}{2\pi i} A(x)\Big(\frac{1}{(y-z)^2}(B,C)(z) + \frac{1}{y-z}[B,C](z) + \cdots\Big)$$

$$= \frac{1}{(y-z)^2}[A,(B,C)](z) + \frac{1}{y-z}[A,[B,C]](z) + \cdots . \tag{5.77}$$

一方, Γ を, $x=y$, $x=z$ を回る 2 つの経路 Γ_y, Γ_z に分けて計算すると,

$$\begin{aligned} I &= \Big(\oint_{\Gamma_y} \frac{dx}{2\pi i} A(x)B(y)\Big)C(z) + B(y)\Big(\oint_{\Gamma_z} \frac{dx}{2\pi i} A(x)C(z)\Big) \\ &= [A,B](y)C(z) + B(y)[A,C](z) \\ &= \frac{1}{(y-z)^2}([A,B],C)(z) + \frac{1}{y-z}[[A,B],C](z) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(y-z)^2}(B,[A,C])(z) + \frac{1}{y-z}[B,[A,C]](z) + \cdots \end{aligned} \tag{5.78}$$

となる. これらの式の係数を比較して, 求める式を得る. □

(5.73) より, (A,B) などが定数ならば, $[\,,\,]$ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の交換子積に一致し, $(\,,\,)$ はその Killing 形式になることがわかる.

5.5 遮蔽作用素

前節の結果から, 自由場を使ってカレント代数を実現するためには, 補正項 $A_\alpha \gamma^{\alpha'}$ をうまく選んで OPE の 2 次の特異項の係数 K を定数にできることが必要かつ十分である. このことが可能であることを示そう. そのためには, 次の遮蔽作用素が有効である. $e_i \in \mathfrak{n}$ の左作用を表す微分作用素 $S_i = S_i^\alpha(x)\partial_\alpha$ において, $x^\alpha \to \gamma^\alpha$, $\partial_\alpha \to \beta_\alpha$ の置き換えで得られる作用素を

$$S_i(z) = :S_i^\alpha\big(\gamma(z)\big)\beta_\alpha(z):$$

とおき, **遮蔽作用素** Q_i, および**遮蔽カレント** s_i を次で定義する.

$$Q_i = \oint s_i(z)dz, \qquad s_i(z) = :e^{-\alpha_i\varphi(z)}: S_i(z). \tag{5.79}$$

γ^α $(\alpha \in \Delta_+)$ の多項式の場 $P(z) = :P\big(\gamma(z)\big):$ に対して, $P(z)$ が定数であることと $[Q_i, P(z)] = 0$ は同値である. 実際, $[Q_i, P(z)] = 0$ は対応する多項式 $P \in \mathbf{C}[x]$ について $S_i P = 0$ を意味するが, これは, P が自明表現に属することを意味しており, したがって P は定数である. また, (5.66) の形の 2 つの

カレント A, B がともに Q_i と可換であれば

$$[Q_i,(A,B)]=([Q_i,A],B)+(A,[Q_i,B])=0 \tag{5.80}$$

により，(A,B) が定数であることが従う．

そこで，カレント代数の自由場による実現には，Q_i と可換になるように Chevalley 生成元 $E_i(z), H_i(z), F_i(z)$ を構成すればよい．それ以外は，[,] 積で順次生成すれば，それらも Q_i と可換であり，適当な定数 g_{ab}, ${f_{ab}}^c$ によって，OPE

$$J_a(z)J_b(w)=\frac{g_{ab}}{(z-w)^2}+\frac{{f_{ab}}^c}{z-w}J_c(w)+\cdots \tag{5.81}$$

が成り立つ．これを望みのものに合わせるには，中心拡大が 1 次元であることから，Killing 形式 g_{ab} の規格化のみ調整すればよい．

Chevalley 生成元に対応するカレント $E_i(z), H_i(z), F_i(z)$ は，微分作用素表示の結果 (5.55) を用いて，次のように構成される．

$$\begin{aligned}
E_i &= \sum_{\alpha>0} :E_i^\alpha(\gamma)\beta_\alpha:,\\
H_i &= \sum_{\alpha>0} :H_i^\alpha(\gamma)\beta_\alpha+a_i:,\\
F_i &= \sum_{\alpha>0} :F_i^\alpha(\gamma)\beta_\alpha+\gamma^{\alpha_i}a_i+r_i\partial\gamma^{\alpha_i}:.
\end{aligned} \tag{5.82}$$

すなわち，E_i, H_i は補正項なしで，また，F_i は定数 r_i を適当に選ぶことにより，遮蔽作用素 Q_j と可換になる．

証明． 以下の OPE の関係式において (5.6) と同様の略記法を用い，Einstein の規約により $\alpha\in\Delta_+$ に関する和の記号も省く．まず，

$$E_i(z)s_j(w)=\left\{\frac{-1}{(z-w)^2}(\partial_\beta E_i^\alpha)(\partial_\alpha S_j^\beta)+\frac{1}{z-w}[E_i,S_j]+\cdots\right\}e^{-\alpha_j\varphi} \tag{5.83}$$

であるが，第 1 項は $\mathfrak{h}$ に関する重みが負になるので 0．第 2 項は (5.61) の第 1 式により 0 となる．次に，

$$\begin{aligned}
H_i(z)s_j(w)=&\left\{\frac{-1}{(z-w)^2}(\partial_\beta H_i^\alpha)(\partial_\alpha S_j^\beta)\right.\\
&\left.+\frac{1}{z-w}([H_i,S_j]-a_{ij}S_j)+\cdots\right\}e^{-\alpha_j\varphi}
\end{aligned} \tag{5.84}$$

も同様にして 0 となる．問題は，$F_i(z)s_j(w)$ の OPE

$$F_i(z)s_j(w)=(F_i^\alpha\beta_\alpha+\gamma^{\alpha_i}a_i+r_i\gamma^{\alpha_i\prime})\cdot(S_j^\beta\beta_\beta e^{-\alpha_j\varphi}) \tag{5.85}$$

である．右辺を展開し各項を計算すると

$$
\begin{aligned}
F_i^\alpha\beta_\alpha\cdot S_j^\beta\beta_\beta e^{-\alpha_j\varphi}&=\left\{\frac{-1}{(z-w)^2}(\partial_\beta F_i^\alpha)(\partial_\alpha S_j^\beta)+\frac{1}{z-w}[F_i,S_j]+\cdots\right\}e^{-\alpha_j\varphi},\\
\gamma^{\alpha_i}a_i\cdot S_j^\beta\beta_\beta e^{-\alpha_j\varphi}&=\left\{\frac{-\delta_\beta^{\alpha_i}}{z-w}S_j^\beta+\gamma^{\alpha_i}S_j+\cdots\right\}\left\{\frac{-a_{ij}}{z-w}+a_i+\cdots\right\}e^{-\alpha_j\varphi},\\
r_i\gamma^{\alpha_i\prime}\cdot S_j^\beta\beta_\beta e^{-\alpha_j\varphi}&=\left\{r_i\frac{\delta_\beta^{\alpha_i}}{(z-w)^2}S_j^\beta+\cdots\right\}e^{-\alpha_j\varphi}.
\end{aligned}
\tag{5.86}
$$

したがって，これを全部加えると (5.61) の第 3 式，および $S_j^{\alpha_i}=\delta_{ij}$ を考慮して

$$
\begin{aligned}
F_i(z)s_j(w)=\Bigg\{&\frac{1}{(z-w)^2}\Big(-(\partial_\beta F_i^\alpha)(\partial_\alpha S_j^\beta)+(r_i+2)\delta_{ij}\Big)\\
&+\frac{-\delta_{ij}}{z-w}a_i+\cdots\Bigg\}e^{-\alpha_j\varphi}
\end{aligned}
\tag{5.87}
$$

となる．

$$
\begin{aligned}
-(\partial_\beta F_i^\alpha)(\partial_\alpha S_j^\beta)&=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta>0}f_{-\alpha_i\beta}{}^\alpha f_{\alpha_j\alpha}{}^\beta\\
&=\left(\frac{h^\vee}{\alpha_i^2}-1\right)\delta_{ij}
\end{aligned}
\tag{5.88}
$$

であるので，

$$
r_i=\frac{2\kappa-h^\vee}{\alpha_i^2}-1 \tag{5.89}
$$

とおけば，(5.64) に注意して

$$
F_i(z)s_j(w)=\delta_{ij}\frac{2\kappa}{\alpha_i^2}\left\{\frac{1}{(z-w)^2}+\frac{-1}{z-w}\alpha_j\varphi'+\cdots\right\}e^{-\alpha_j\varphi}, \tag{5.90}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
F_i(z)s_j(w)&=\delta_{ij}\frac{2\kappa}{\alpha_i^2}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{z-w}e^{-\alpha_j\varphi}\right)+\cdots,\\
s_i(z)F_j(w)&=\delta_{ij}\frac{2\kappa}{\alpha_i^2}\frac{1}{(z-w)^2}e^{-\alpha_j\varphi}+\cdots
\end{aligned}
\tag{5.91}
$$

となって，$[Q_i,F_j(z)]=0$ がいえた． □

こうして得られたカレントは，OPE の 2 次の特異項の係数が定数となる．パラメータ κ を

$$
\kappa=k+h^\vee
$$

ととれば，$H_i(z)H_j(w)$ の 2 次の特異項が

$$
-\partial_\alpha H_i^\beta\partial_\beta H_j^\alpha+\kappa b_{ij}=-\sum_{\alpha>0}(\alpha_i^\vee,\alpha)(\alpha_j^\vee,\alpha)+\kappa b_{ij}=kb_{ij} \tag{5.92}
$$

となり，求める OPE

$$
\begin{aligned}
H_i(z)H_j(w) &= \frac{k}{(z-w)^2} b_{ij} + \cdots , \\
H_i(z)E_j(w) &= \frac{1}{z-w} a_{ij} E_j(w) + \cdots , \\
H_i(z)F_j(w) &= \frac{-1}{z-w} a_{ij} F_j(w) + \cdots , \\
E_i(z)F_j(w) &= \frac{k}{(z-w)^2} \frac{2}{\alpha^2} \delta_{ij} + \frac{1}{z-w} \delta_{ij} H_j(w) + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.93}
$$

が成り立つ.

最後に，脇本表現におけるストレステンソルを与えておこう.

$$
T(z) = \frac{1}{2\kappa} : (a, a) - 2(\rho, a') : + \sum_{\alpha \in \Delta_+} : \beta_\alpha \gamma'^\alpha : \tag{5.94}
$$

この式より得られる中心の値は

$$
c = l - \frac{12\rho^2}{\kappa}
$$

であり，奇妙な関係 (4.151) により $k \dim \mathfrak{g}/\kappa$ に等しい[7].

5.6 積分表示

前節で得られた自由場表現を用いて KZ 方程式の解の積分表示を構成する[8]. KZ 方程式の解を得るには，カレント代数の表現空間で，OPE

$$
J^a(z)\Phi(w) = \frac{\rho(J^a)}{z-w} \Phi(w) + \cdots \tag{5.95}
$$

を満たす primary 場 Φ を構成し，その真空期待値を計算できればよい．カレント $J^a(z)$ が自由場で与えられているときには，そのような作用素 $\Phi(z)$ は自由 boson の頂点作用素を使って簡単に得られる．実際

$$
\Phi(z) = : e^{\lambda \varphi(z)} : \tag{5.96}
$$

---

7) Ferder 型 resolution など脇本表現の構造については，P.Bouwknegt, J.McCarthy, K.Pilch, “Free field approach to 2-dimensional conformal field theories”, Common trends in mathematics and quantum field theories (Kyoto, 1990). Prog. Theor. Phys. Suppl. **102** (1990) 67–135.

8) ここでの導出法は，H. Awata, A. Tsuchiya and Y. Yamada, “Integral Formulas for the WZNW Correlation Functions”, Nucl. Phys. **B365** (1991) 680–696 に基づく.

とおくと，カレントのつくり方から

$$E_i(z) : e^{\lambda\varphi(w)} : = \cdots ,$$
$$H_i(z) : e^{\lambda\varphi(w)} : = \frac{\lambda_i}{z-w} : e^{\lambda\varphi(z)} : + \cdots \tag{5.97}$$

となって，これは重み λ の最高重みベクトルとなる．以下では λ は可積分な重み $\lambda_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ とする．表現空間の一般元は，primary 場 $: e^{\lambda\varphi(z)} :$ からカレントの作用で生成され，特にゼロモード部分の作用では $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 L_λ が得られる．実際，ベクトル $\left| v \right\rangle \in L_\lambda$ には

$$\Phi(z) = P\big(\gamma(z)\big) : e^{\lambda\varphi(z)} : \tag{5.98}$$

が対応する．ここに，$P(\gamma(z))$ は，ベクトル $\left| v \right\rangle \in L_\lambda$ に対応する多項式

$$P(x) = \left\langle \lambda \right| e^X \left| v \right\rangle \qquad (X = \sum_\alpha x^\alpha e_\alpha)$$

において $x^\alpha \to \gamma^\alpha(z)$ と置き換えて得られる作用素を表す．こうして，求めるべき primary 場の表示が得られた．これらの作用素の積の真空期待値

$$\left\langle \prod_{a=1}^{N} P_a\big(\gamma(z_a)\big) : e^{\lambda_a\varphi(z_a)} : \right\rangle \tag{5.99}$$

は KZ 方程式の一つの解を与える．しかし，これだけでは単なる差積による自明な解しか与えない．その理由は，頂点作用素の OPE

$$: e^{\lambda\varphi}(z) :: e^{\mu\varphi(w)} : = (z-w)^{\frac{\lambda\mu}{\kappa}} : e^{(\lambda+\mu)\varphi(w)} : + \cdots \tag{5.100}$$

が, 表現のテンソル積の分解 $L_\lambda \otimes L_\mu = L_{\lambda+\mu} \oplus \cdots$ の先頭項しか与えないことによる．より重みの低い最高重みの既約成分に属する解を得るには，KZ 方程式の解である性質を壊すことなく，重みを下げる必要がある．そこで，primary 場の他に遮蔽作用素 Q_i をいくつか挿入する．遮蔽作用素 Q_i $(i = 1, \ldots, l = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g})$ はカレントと可換なので，これを挿入しても KZ 方程式の解である性質は保たれることに注意しよう．実際，遮蔽作用素に含まれる積分が非自明な積分表示解を与える．

総計 m 個の遮蔽作用素

$$Q_1, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots, Q_2, \cdots, Q_l, \ldots, Q_l \tag{5.101}$$

を挿入することにして，それらを通し番号で $Q_{\bar{1}}, \ldots, Q_{\bar{m}}$ と書くことにする．すなわち，$i = 1, \ldots, m$ に対して $\bar{i}$ は $1, 2, \ldots, l$ のいずれかを表す．この記号

で，求めるべき相関関数は[9]

$$\left\langle \prod_{a=1}^{n} P_a\bigl(\gamma(z_a)\bigr)e^{\lambda_a\varphi(z_a)} \prod_{i=1}^{m} Q_{\bar{i}} \right\rangle$$
$$= \left\langle \prod_{a=1}^{n} P_a\bigl(\gamma(z_a)\bigr)e^{\lambda_a\varphi(z_a)} \prod_{i=1}^{m} \left(\int dt_i S_{\bar{i}} e^{-\alpha_{\bar{i}}\varphi(t_i)} \right) \right\rangle$$
$$= \int dt_1 \cdots dt_m l_\lambda \left\langle \prod_{a=1}^{n} P_a \prod_{i=1}^{m} S_{\bar{i}} \right\rangle_{\beta\gamma} \tag{5.102}$$

となる．ここで l_λ は boson 場 φ に関する相関関数で，

$$l_\lambda = \left\langle \prod_{a=1}^{n} e^{\lambda_a\varphi(z_a)} \prod_{i=1}^{m} e^{-\alpha_{\bar{i}}\varphi(t_i)} \right\rangle_\varphi$$
$$= \prod_{1\le a<b\le n} (z_a - z_b)^{\frac{\lambda_a\lambda_b}{\kappa}} \prod_{a=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(z_a - t_i)^{-\frac{\lambda_a\alpha_{\bar{i}}}{\kappa}} \prod_{1\le i<j\le m} (t_i - t_j)^{\frac{\alpha_{\bar{i}}\alpha_{\bar{j}}}{\kappa}} \tag{5.103}$$

と計算される．あとは場 $\beta\gamma$ に関する相関関数 $\langle\cdots\rangle_{\beta\gamma}$ を計算すればよい．これは，S_i, P_a が具体的に与えられれば，Wick の定理により有理式として計算可能であるが，一般にはカレント S_i, F_i の式は複雑であり，計算を実行するのは容易ではない．むしろ実際の計算には，カレント S_i や F_i の具体的な式よりも，それらの構成方法から従うこれらのカレントの性質を使う方が有効である．

遮蔽カレント S_α は，上三角群への上三角代数の左作用として定義した．定義よりただちに，次の OPE が従う．

$$S_\alpha(z)S_\beta(w) = \frac{1}{z-w}[S_\alpha, S_\beta](w) + \cdots ,$$
$$S_\alpha(z)P(w) = \frac{1}{z-w}S_\alpha P(w) + \cdots . \tag{5.104}$$

ここに，$[S_\alpha, S_\beta](w)$, $S_\alpha P(w)$ は，対応する微分作用素 $[S_\alpha, S_\beta]$, および多項式 $S_\alpha P$ から，対応

$$x^\alpha \to \gamma^\alpha(w), \qquad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \to \beta_\alpha(w)$$

により定まる場を表す．式 (5.104) は，カレント代数と，その primary 場への作用 (の上三角部分) と同じ式なので，これらの挿入された相関関数は，カレントの挿入と同様にして Ward 恒等式 (4.134) によって帰納的に計算できる．いまの場合，中心拡大から生ずる項がないので，より簡単になっている．このと

9) 以下，正規積の記号は煩雑になるので省略するが，同一点の作用素の積はすべて正規積の意味である．

き，Ward 恒等式は

$$\left\langle S_{\bar{1}}(t_1)\cdots S_{\bar{m}}(t_m)\prod_{a=1}^{n}P_a(z_a)\right\rangle_{\beta\gamma}$$
$$=\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{t_1-t_i}\left\langle S_{\bar{2}}(t_2)\cdots[S_{\bar{1}},S_{\bar{j}}](t_i)\cdots S_{\bar{m}}(t_m)\prod_{a=1}^{n}P_a(z_a)\right\rangle_{\beta\gamma}$$
$$+\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{t_1-z_a}\left\langle S_{\bar{2}}(t_2)\cdots S_{\bar{m}}(t_m)P_1(z_1)\cdots(S_{\bar{1}}P_a)(z_a)\cdots P_n(z_n)\right\rangle_{\beta\gamma} \tag{5.105}$$

である．

これより，$\beta\gamma$ 場の期待値が，次のように求められる．

$$\left\langle \prod_{i=1}^{m}S_{\bar{i}}(t_i)\prod_{a=1}^{n}P_a(z_a)\right\rangle_{\beta\gamma}=\sum_{(I_1,\ldots,I_n)}\prod_{a=1}^{n}P(a,I_a) \tag{5.106}$$

記号の説明をしよう．$(I_1,\ldots,I_n)$ が $\{1,\ldots,m\}$ の**順序つき分割**とは，(1) 各 $a=1,\ldots,n$ について $I_a=(i_1,\ldots,i_k)$ は整数の列であり，(2) 集合として

$$\coprod_{a=1}^{n}I_a=\{1,\ldots,m\} \qquad \text{(disjoint union)}$$

となるものとする．その総数は

$$N_{m,n}=\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!}$$

で与えられる[10]．(5.106) の右辺の和は，そのような $N_{m,n}$ 個の順序つき分割 $(I_1,\ldots,I_n)$ についての和を表す．

また $I_a=(i_1,\ldots,i_k)$ に対して

$$P(a,I_a)=\frac{[S_{\overline{i_1}}\cdots S_{\overline{i_k}}P_a]}{(t_{i_1}-t_{i_2})(t_{i_2}-t_{i_3})\cdots(t_{i_{k-1}}-t_{i_k})(t_{i_k}-z_a)} \tag{5.107}$$

であり，$[f(x)]$ は多項式 $f(x)\in\mathbf{C}[x]$ の定数項を表す．

例：$m=2,n=2$ の場合，$\{1,2\}$ の可能な順序つき分割 (I_1,I_2) は

$$\begin{matrix}(\{1,2\},\phi), & (\{2,1\},\phi), & (\{1\},\{2\}),\\ (\{2\},\{1\}), & (\phi,\{1,2\}), & (\phi,\{2,1\})\end{matrix} \tag{5.108}$$

10) 式 (5.105) の項数を数えることにより，漸化式 $N_{m,n}=(m+n-1)N_{m-1,n}$ が得られる．

の6個であり，この場合の式 (5.106) は

$$\left\langle S_{\bar{1}}(t_1)S_{\bar{2}}(t_2)P_1(z_1)P_2(z_2)\right\rangle_{\beta\gamma} = \frac{[S_{\bar{1}}S_{\bar{2}}P_1][P_2]}{(t_1-t_2)(t_2-z_1)} + \frac{[S_{\bar{2}}S_{\bar{1}}P_1][P_2]}{(t_2-t_1)(t_1-z_1)} + \frac{[S_{\bar{1}}P_1]}{(t_1-z_1)}\frac{[S_{\bar{2}}P_2]}{(t_2-z_2)} + \frac{[S_{\bar{2}}P_1]}{(t_2-z_1)}\frac{[S_{\bar{1}}P_2]}{(t_1-z_2)} + \frac{[P_1][S_{\bar{1}}S_{\bar{2}}P_2]}{(t_1-t_2)(t_2-z_2)} + \frac{[P_1][S_{\bar{2}}S_{\bar{1}}P_2]}{(t_2-t_1)(t_1-z_2)} \tag{5.109}$$

となる．図 5.1 のような図形を対応させると構造がわかりやすい．(例終わり)

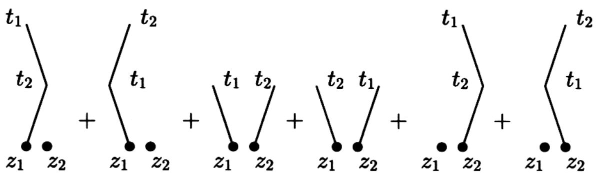


図 5.1　$m=n=2$ の順序つき分割の和

さて，(5.106), (5.107) が (5.105) を満たすことを示しておこう．

証明． まず，$n=1$ の場合を考える．示すべきは

$$\left\langle \prod_{i=1}^{m} S_{\bar{i}}(t_i)P(z)\right\rangle_{\beta\gamma} = \sum_{w\in S_m} w\left(\frac{[S_{\bar{1}}\cdots S_{\overline{m}}P]}{(t_1-t_2)(t_2-t_3)\cdots(t_{m-1}-t_m)(t_m-z)}\right) \tag{5.110}$$

である．ここに，$w\in S_m$ は $S_{\bar{i}}$ と t_i の添字 $1,2,\ldots,m$ に対する置換を表す．この右辺を t_1 の関数とみると，$t_1=t_i$ $(i\neq 1)$ および $t_1=z$ に単純極がある．その留数が，漸化式 (5.105) の要求するものと等しいことを，m についての帰納法で確かめる．$t_1=z$ の極は $w(m)=1$ となる $(m-1)!$ 個の項から生まれる．その留数は，帰納法の仮定より $\left\langle \prod_{i=2}^{m} S_{\bar{i}}(t_i)S_{\bar{1}}P(z)\right\rangle$ に等しい．$t_1=t_i$ $(i=2,\ldots,m)$ の極は，$w(1)=w(i)\pm 1$ の場合に生じ，それぞれ $(m-1)!$ 個の項が寄与する．留数は，$S'_{\bar{i}}=[S_{\bar{1}},S_{\bar{i}}]$ とおき，$w\in S_{m-1}$ を添字 $2,\ldots,m$ の置換とすると，帰納法の仮定より

$$\sum_{w\in S_{m-1}} w\left(\frac{[S_{\bar{2}}\cdots S'_{\bar{i}}\cdots S_{\overline{m}}P_a]}{(t_2-t_3)\cdots(t_m-z)}\right) = \left\langle S_{\bar{2}}(t_2)\cdots S'_{\bar{i}}(t_i)\cdots S_{\overline{m}}(t_m)P(z)\right\rangle \tag{5.111}$$

となって漸化式 (5.105) が従う．

$n>1$ の場合，(5.106) の右辺で $t_1=t_i$ $(i=2,\ldots,m)$ および $t_1=z_a$ $(a=1,\ldots,n)$

における留数を計算する．各留数には $N_{m-1,n}$ 項の和が寄与し，それが，(5.105) の要求するものに等しいことが，$n=1$ の場合を用いて示される． □

以上の結果は，Schechtman と Varchenko によって導かれた KZ 方程式の解の積分表示式[11)]

$$\big|\,\Psi(z_1,\ldots,z_n)\,\big\rangle = \int dt_1\cdots dt_m l_\lambda \omega \tag{5.112}$$

と等価である．ここに

$$\begin{aligned}
l_\lambda &= \prod_{1\le a<b\le n}(z_a-z_b)^{\frac{\lambda_a\lambda_b}{\kappa}}\prod_{a=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(z_a-t_i)^{-\frac{\lambda_a\alpha_{\bar i}}{\kappa}}\prod_{1\le i<j\le m}(t_i-t_j)^{\frac{\alpha_{\bar i}\alpha_{\bar j}}{\kappa}},\\
\omega &= \sum_{(I_1,\ldots,I_n)}\bigotimes_{a=1}^{n}\omega(a,I_a),\\
\omega(a,(i_1,\ldots,i_k)) &= \frac{f_{\overline{i_1}}\cdots f_{\overline{i_k}}\,\big|\,\lambda_a\,\big\rangle}{(t_{i_1}-t_{i_2})(t_{i_2}-t_{i_3})\cdots(t_{i_{m-1}}-t_{i_m})(t_{i_m}-z_a)}.
\end{aligned} \tag{5.113}$$

実際，S_i の定義 (5.57) より，変換 (4.27) による双対 $\big\langle\,\Psi(z)\,\big| = \big|\,\Psi(z)\,\big\rangle^*$ と $\big|\,v_1\,\big\rangle\otimes\cdots\otimes\big|\,v_n\,\big\rangle$ の内積を，多項式 $P_a(x)=\big\langle\,\lambda\,\big|\,X\,\big|\,v_a\,\big\rangle$ を用いて表したものが (5.102), (5.106) である．脇本表現を用いるとトーラス上の相関関数の計算も可能で，これは黒木・武部によってなされた[12)]．

最後に，多項式 $P_a(x)$ が

$$P(x) = F_{i_1}\cdots F_{i_k}1 = \big\langle\,\lambda\,\big|\,e^X f_{i_1}\cdots f_{i_k}\,\big|\,\lambda\,\big\rangle$$

の形に与えられたとき，相関関数を陽に計算するために有用な公式として，

$$\begin{aligned}
&\left\langle \prod_{l=1}^{m} S_{\bar l}(t_l)(F_jP)(z)\right\rangle_{\beta\gamma}\\
&\quad= \sum_{i=1}^{m}\delta_{\bar i j}\left(\sum_{l(\neq i)=1}^{m}\frac{\alpha_{\bar i}^{\vee}\alpha_l}{t_i-t_l}-\frac{\alpha_{\bar i}^{\vee}\lambda}{t_i-z}\right)\left\langle\prod_{l(\neq i)=1}^{m}S_{\bar l}(t_l)P(z)\right\rangle_{\beta\gamma}
\end{aligned} \tag{5.114}$$

を示しておこう[13)]．

11) V.V. Schechtman and A. N. Varchenko, "Hypergeometric solutions of Knizhnik-Zamolodchikov equations", Lett. Math. Phys. **20** (1990) 279–283; "Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology", Invent. Math. **106** (1991) 139–194.

12) G. Kuroki, T. Takebe, "Bosonization and integral representation of solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard equations", Comm. Math. Phys. **204** (1999) 587–618.

13) H. Awata, "Screening currents Ward identity and integral formulas for the WZNW correlation functions", Prog. Theor. Phys. Suppl. **110** (1992) 303–319.

証明. 次の形の相関関数

$$\left\langle (F_jP)(z)e^{\lambda\varphi(z)} \prod_{i=1}^{m} s_{\bar{i}}(t_i) \right\rangle,$$
$$(F_jP)(z)e^{\lambda\varphi(z)} = \oint_z \frac{dw}{2\pi i} F_j(w)P(z)e^{\lambda\varphi(z)} \tag{5.115}$$

を 2 通りに計算して導く．まず，OPE

$$F_j(w)s_{\bar{i}}(z) = -\kappa\delta_{\bar{i}j}\frac{2}{\alpha_j^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{w-z}e^{-\alpha_{\bar{i}}\varphi(z)}\right) \tag{5.116}$$

より，

$$\left[\oint_z \frac{dw}{2\pi i}F_j(w), s_{\bar{i}}(z)\right] = -\kappa\delta_{\bar{i}j}\frac{2}{\alpha_j^2}\frac{\partial}{\partial z}e^{-\alpha_{\bar{i}}\varphi(z)}, \tag{5.117}$$

したがって (5.115) は

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\kappa\delta_{\bar{i}j}\frac{2}{\alpha_{\bar{i}}^2}\frac{\partial}{\partial t_i}\left\langle \prod_{i=1}^{m} e^{-\alpha_{\bar{i}}\varphi(t_i)}e^{\lambda\varphi(z)}\right\rangle_{\varphi}\left\langle \prod_{l(\neq i)=1}^{m} S_{\bar{l}}(t_l)P(z)\right\rangle_{\beta\gamma}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\delta_{\bar{i}j}\frac{2}{\alpha_{\bar{i}}^2}\left(\sum_{l(\neq i)=1}^{m}\frac{\alpha_{\bar{i}}\alpha_{\bar{l}}}{t_i-t_l} - \frac{\alpha_{\bar{i}}\lambda}{t_i-z}\right)\\
&\quad\times\left\langle \prod_{i=1}^{m} e^{-\alpha_{\bar{i}}\varphi(t_i)}e^{\lambda\varphi(z)}\right\rangle_{\varphi}\left\langle \prod_{l\neq i} S_{\bar{l}}(t_l)P(z)\right\rangle_{\beta\gamma}
\end{aligned} \tag{5.118}$$

と書かれる．一方 (5.115) は

$$\left\langle \prod_{i=1}^{m} e^{-\alpha_{\bar{i}}\varphi(t_i)}e^{\lambda\varphi(z)}\right\rangle_{\varphi}\left\langle \prod_{l=1}^{m} S_{\bar{l}}(t_l)(F_jP)(z)\right\rangle_{\beta\gamma} \tag{5.119}$$

でもあるので，結局 (5.114) が得られる． □

5.7 Bethe 法

$\mathfrak{g}$ を有限次元単純 Lie 代数とし，$V_a = L_{\lambda_a}$ $(a = 1, \ldots, n)$ をその既約表現 (最高重み λ_a) とする．KZ 方程式に現れた行列

$$H_a = \sum_{b(\neq a)=1}^{n}\frac{\Omega_{ab}}{z_a - z_b} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.120}$$

はテンソル積空間 $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ 上の可換な作用素を定める．これらの作用素 $H = (H_1, \ldots, H_n)$ は同時対角化可能であり，これを同時対角化する問題を **Gaudin 模型**とよぶ．H_a は V への $\mathfrak{g}$ の作用と可換なので，最高重みベクトルであるような固有ベクトルがわかれば十分である．

ここでは，KZ 方程式の解の積分表示に基づく Gaudin 模型の解法を紹介し

よう[14]．KZ 方程式は

$$\kappa \frac{\partial}{\partial z_a} \Psi = H_a \Psi \tag{5.121}$$

と書くことができ，解の積分表示は次の形であった．

$$\Psi = \int dt_1 \cdots dt_m \Phi^{\frac{1}{\kappa}} \omega \tag{5.122}$$

ここに

$$\Phi(z,t) = \prod_{1 \le a < b \le n} (z_a - z_b)^{\lambda_a \cdot \lambda_b} \prod_{i=1}^{m} \prod_{a=1}^{n} (z_a - t_i)^{-\lambda_a \cdot \alpha_{\bar{i}}} \prod_{1 \le i < j \le m} (t_i - t_j)^{\alpha_{\bar{i}} \cdot \alpha_{\bar{j}}} \tag{5.123}$$

であり，$\omega = \omega(z,t)$ は κ に依存しない V に値をとる有理関数である．

KZ 方程式の形から，Gaudin 模型の固有値・固有ベクトルは KZ 方程式の解の $\kappa = 0$ における漸近的な振舞いに関係すると期待される．実際，この関係を詳しく調べることにより次の結果が得られた．

H_a の固有値 h_a, 固有ベクトル ψ は

$$h_a = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z_a}\right|_{t=t_c} \quad (a = 1, \ldots, n), \qquad \psi = \omega\Big|_{t=t_c} \tag{5.124}$$

で与えられる．ここに t_c は Φ の臨界点で，次の方程式の根として定まる[15]．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5.125}$$

この結果は統計力学で **Bethe 仮説法**とよばれる方法と関係している．Bethe 仮説法は 1931 年の Bethe の論文[16]にはじまり，現在にいたるまで広く深く応用されている．Bethe の結果とその応用の一端を紹介しよう．

$V = (\mathbf{C}^2)^{\otimes n}$ において，次の行列

$$H = \sum_{i=1}^{n} (P_{i,i+1} - 1) \tag{5.126}$$

を対角化する問題を **XXX スピン鎖模型** (Heisenberg 模型) という．ここに $P_{i,j}$ はテンソル積の i,j 成分の入れ換え作用素で $P_{n,n+1} = P_{n,1}$ と約束する．

---

14) H.M. Babujian and R. Flume, "Off-Shell Bethe Ansatz Equation for Gaudin Magnets and Solutions of Knizhnik-Zamolodchikov Equations", Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 2029–2040.

15) こうして得られる (最高重み) 固有ベクトルが完全系をなすならば，方程式 (5.125) の根 (Φ の臨界点) の個数が，$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ の既約分解における $L_{\sum_a \lambda_a - \sum_i \alpha_{\bar{i}}}$ 表現の多重度を与えることになる．

16) H. Bethe, "On the Theory of Metals, I. Eigenvalues and Eigenfunctions of a linear Chain of Atoms", Zeits. Phys. **71** (1931) 205–226. 選集 "Selected Works of Hans A Bethe", World Scientific (1996) にも収められている．

この問題の厳密解は Bethe により与えられた．その結果のみ記しておこう．V における $\mathfrak{sl}_2$ の対角作用の下で，重み $n-2l$ $(l=0,1,\ldots)$ の最高重みベクトルの空間を $V(l)$ とする．H は各 $V(l)$ ごとに作用し，その固有値 h は

$$h = \sum_{i=1}^{l} \frac{4}{t_i^2 - 1} \tag{5.127}$$

で与えられる．ここに $t_1, \ldots, t_l$ は **Bethe 方程式**

$$\left(\frac{t_i + 1}{t_i - 1}\right)^n = \prod_{j(\neq i)=1}^{l} \frac{t_i - t_j - 2}{t_i - t_j + 2} \tag{5.128}$$

の根である．Bethe はまた「ストリング仮説」とよばれる魅力的な，(しかし厳密には正しくない) 仮定に基づき，この方程式の根の個数を計算した．その結果は

$$c_{n,l} = \sum_m \prod_{i=1}^{l} \binom{p_i + m_i}{m_i}, \qquad p_i = n - 2\sum_{j=1}^{l} \min(i,j) m_j \tag{5.129}$$

で与えられる．ここに和 $\sum_m$ は $m_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{l} i m_i = l$ を満たす $m_1, \ldots, m_l$ にわたる．Bethe の原論文では，この $c_{n,l}$ がたしかに $V(l)$ の次元を与えていることも示されている．つまり

$$c_{n,l} = \binom{n}{l} - \binom{n}{l-1} = \dim V(l)\,. \tag{5.130}$$

ここで $c_{n,l}$ は (4.100) に与えた Kostka 数である．これは Pascal 三角形を半分にしたダイアグラム (4.101) 上の経路の個数である．レベル k が有限の場合の結合則では，さらに上部を切り落としたダイアグラム (4.102) が対応していた．その場合，経路の個数について

$$c_{n,l}^{(k)} = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left[\binom{n}{l + (k+2)m} - \binom{n}{l - 1 + (k+2)m} \right], \tag{5.131}$$

および,

$$c_{n,l}^{(k)} = \sum_m \prod_{i=1}^{k} \binom{p_i + m_i}{m_i}, \qquad p_i = \min(n, k+2l-i) - 2\sum_{j=1}^{k} \min(i,j) m_j \tag{5.132}$$

という式も成り立つ．(5.132) の和 $\sum_m$ は $m_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} i m_i = l$ を満たす $m_1, \ldots, m_k$ にわたる．(5.131) は boson 型，(5.132) は fermion 型公式とよばれる．さらに，これらには良い q–類似があって，$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のレベル k 表現の指標と関係する．同様の結果や予想は，一般の affine Lie 代数についても知られて

いる[17].

5.8 超幾何微分方程式

ミニマル模型や WZW 模型の例において，primary 場の相関関数は，ある微分方程式を満たし，解は具体的な積分表示で与えられた．一般に，これらの解は多価関数となる．以下では，この多価性を記述する**モノドロミー**について考察する．非自明なモノドロミーをもつ微分方程式として，もっとも簡単でかつ重要な例として，超幾何微分方程式を考えよう．

次式で定義される $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ を**超幾何級数**という．

$$
\begin{aligned}
F(\alpha,\beta,\gamma,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n \\
&= 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma 1} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} z^2 + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.133}
$$

ここに $(\alpha)_n$ は

$$
(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) \tag{5.134}
$$

である．一般の α,β,γ に対して級数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の収束半径は 1 である．しかし，収束半径内部だけを考えていたのでは，$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ のおもしろさはみえてこない．幾何級数

$$
1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z} \tag{5.135}
$$

が収束半径 $|z| < 1$ を越えて，複素平面全体で有理関数として意味をもったように，級数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ にも，収束半径 $|z| < 1$ を越えて，その潜在能力を思う存分発揮してもらいたい．そのために活躍するのが級数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の満たす微分方程式である．

超幾何級数の係数の比をみて，$y(z) = F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ は微分方程式

$$
(E+\gamma-1)\,Ey = z\,(E+\alpha)\,(E+\beta)\,y, \qquad E = z\frac{d}{dz}, \tag{5.136}
$$

すなわち，

$$
z(1-z)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)z]y' - \alpha\beta y = 0 \tag{5.137}
$$

17) G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, "Paths, crystals and fermionic formulae", Prog. Math. Phys. **23** (2002) 205–272.

を満たしていることが示される．これを**超幾何微分方程式**という．

超幾何微分方程式は 2 階の線形方程式であるから，$y(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ 以外にもう一つ一次独立な解があるはずである．実際，$z = 0$ 近傍での解を，級数 $y = z^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_0 = 1$ の形に求めてみると，

$$
\begin{aligned}
y_{0,1}(z) &= F(\alpha, \beta, \gamma, z), \\
y_{0,2}(z) &= z^{1-\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma, z)
\end{aligned}
\tag{5.138}
$$

が 2 つの独立な解となる (γ が 0 または負の整数の場合は別の考察が必要).

微分方程式 (5.137) は，その y'' の係数が示すように，$z = 0$ 以外に $z = 1$ の近くでも特異な挙動をする．これを調べるために，(5.137) を $w = 1 - z$ によって書き換えよう．少し計算すると

$$
w(1-w)y'' + [\alpha + \beta - \gamma + 1 - (\alpha + \beta + 1)w]y' - \alpha\beta y = 0 \tag{5.139}
$$

を得る．これは，もともとの超幾何微分方程式で α, β, γ を $\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1$ と置き換えたものであるから

$$
\begin{aligned}
y_{1,1}(z) &= F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z), \\
y_{1,2}(z) &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z)
\end{aligned}
\tag{5.140}
$$

が独立な解となる．超幾何微分方程式の任意の解は，$z = 1$ の近傍では，この 2 つの解の一次結合で表されるので，関数 $y_{0,1}(z)$ も $z = 1$ の近傍で

$$
y_{0,1}(z) = Ay_{1,1}(z) + By_{1,2}(z) \tag{5.141}
$$

と表されるはずである．この係数 A, B を**接続係数**という．これらは，z については定数であるが，パラメータ α, β, γ には依存してよい．実際，係数 A, B は**ガンマ関数**

$$
\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{5.142}
$$

を用いて表され，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z) \\
&+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z)
\end{aligned}
\tag{5.143}
$$

証明. $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ や $(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ などの多価関数の分岐を決めないことには，式 (5.143) そのものが意味をなさないが，ここでは，z,α,β,γ が $0\le z\le 1$, $\alpha+\beta<\gamma$ を満たす実数として，(5.141) のすべての関数が実となる分岐をとって考える．このとき，

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \tag{5.144}$$

となるので，これを用いて $z=0,1$ での (5.141) の値を比較すれば，係数 A,B が (5.143) のように決まる．(5.144) を示すには，超幾何級数の積分表示

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}dt \tag{5.145}$$

を利用する．実際，

$$(1-tz)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n}{n!}t^n z^n, \tag{5.146}$$

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{5.147}$$

を用いれば，積分と和の交換の下に (5.133) を得る．この積分表示 (5.145) より直ちに (5.144) を得る． □

微分方程式 (5.137) は，この形からは明らかではないが，$z=\infty$ も特異点になっている．実際 (5.136) を $w=1/z$ によって書き換えると，パラメータが $(\alpha,\beta,\gamma)\to(\alpha,1+\alpha-\gamma,\alpha-\beta+1)$ と変化した方程式になるので，

$$\begin{aligned} y_{\infty,1}(z)&=(-z)^{-\alpha}F\Big(\alpha,1+\alpha-\gamma,1+\alpha-\beta,\frac{1}{z}\Big),\\ y_{\infty,2}(z)&=(-z)^{-\beta}F\Big(\beta,1+\beta-\gamma,1+\beta-\alpha,\frac{1}{z}\Big)\end{aligned} \tag{5.148}$$

が $z=\infty$ の近くでの 2 つの独立解を与える．$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ を $z=\infty$ での解で表す接続公式は，

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,z)=&\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,1+\alpha-\gamma,1+\alpha-\beta,\frac{1}{z}\right)\\ &+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}F\left(\beta,1+\beta-\gamma,1+\beta-\alpha,\frac{1}{z}\right)\end{aligned} \tag{5.149}$$

と与えられる[18]．

18) 証明は Barnes の積分表示を使ったものが簡明である．E. T. Whittaker and G. N. Watson, “A Course of MODERN ANALYSIS”, Cambridge Univ. Press (4th Ed.) 1927.

こうして，超幾何微分方程式の $z=0,1,\infty$ における解の基本系 Y_0, Y_1, Y_∞ とその接続関係式

$$Y_i(z)=\begin{bmatrix} y_{i,1}(z) \\ y_{i,2}(z) \end{bmatrix} \qquad (i=0,1,\infty),$$
$$Y_0=M_{01}Y_1=M_{0\infty}Y_\infty \tag{5.150}$$

が得られる．ここで，接続係数のなす行列 (**接続行列**) は，

$$M_{01}=\begin{bmatrix} \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)} \end{bmatrix},$$

$$M_{0\infty}=\begin{bmatrix} \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \\ (-1)^{1-\gamma}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)} & (-1)^{1-\gamma}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \end{bmatrix} \tag{5.151}$$

と与えられる．

補足　基本解 $Y_i(z)$ の規格化を

$$\overline{Y}_0=\mathrm{diag}\left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)},\frac{\Gamma(1+\beta-\gamma)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)}\right)Y_0,$$
$$\overline{Y}_1=\mathrm{diag}\left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\beta-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\gamma)},\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)}\right)Y_1, \tag{5.152}$$
$$\overline{Y}_\infty=\mathrm{diag}\left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)},\frac{\Gamma(1+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}\right)Y_\infty$$

と取り直し (これは積分表示 (5.145) の係数のガンマ因子を除くことに対応している)，$\Gamma(a)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{s(z)}$, $s(a)=\sin(\pi a)$ を用いると，接続係数は簡単になって

$$\overline{M}_{01}=\begin{bmatrix} \dfrac{s(\gamma-\beta)}{s(\gamma-\alpha-\beta)} & \dfrac{s(\beta)}{s(\alpha+\beta-\gamma)} \\ \dfrac{s(\alpha)}{s(\gamma-\alpha-\beta)} & \dfrac{s(\gamma-\alpha)}{s(\alpha+\beta-\gamma)} \end{bmatrix},$$
$$\overline{M}_{0\infty}=\begin{bmatrix} 1 & \\ & (-1)^{1-\gamma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{s(\beta)}{s(\beta-\alpha)} & \dfrac{s(\gamma-\beta)}{s(\alpha-\beta)} \\ \dfrac{s(\alpha)}{s(\beta-\alpha)} & \dfrac{s(\gamma-\alpha)}{s(\alpha-\beta)} \end{bmatrix} \tag{5.153}$$

となる[19].

これらの接続公式によって，超幾何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ は，その収束半径を越えて，$X = \mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ に多価正則関数として解析接続される．多価になるのは，空間 X の一点 z_0 から閉じた経路 γ に沿って基本解を接続して戻ってきたときに，ある行列 M_γ による線形変換を受けることによる．行列 M_γ は，空間 X の基本群 $\pi_1(X,z_0)$ から $GL(2,\mathbf{C})$ への準同型を与え，これを**モノドロミー表現**という．一般に，与えられた線形微分方程式について接続係数やモノドロミー表現を求めることは基本的問題であるが，結果が具体的に計算できることは稀である．超幾何微分方程式は，それが可能であるような特別重要な例である．

5.9 共形ブロックとモノドロミー

物理的に意味のある相関関数は一価関数であるか，多価であっても高々 fermion の符号に関する二価性が許される程度である．ところが，相関関数を微分方程式の解として特徴づけようとすると，前節でみたような非自明なモノドロミーに由来する多価性が現れる．この多価性は，相関関数を primary 場の積の真空期待値として解釈するとき，どのように理解すればよいのであろうか．このあたりの事情を少し歴史的なことも含めて反省しておこう．

もともとの BPZ の理論では，実 2 次元空間の場の理論を考察しており，相関関数は場 $\Phi(x,y)$ の置かれた場所 $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に関する一価関数と考えられた．$\mathbf{R}^2$ における共形不変性は，正則座標 $z = x + iy$ と反正則座標 $\bar{z} = x - iy$ の各々に関する任意の解析的変換に関する対称性を要求する．これから，相関関数を $(z,\bar{z})$ の関数とみた場合，その各々に関して，ある線形微分方程式に従うことが示される．いままで述べてきたことは，こうした立場からみると，このうちの正則座標 z にのみ依存する部分に限った考察であった．物理的な相関関数を得るためには，もう一方の反正則座標 $\bar{z}$ に依存する部分も同時に考察すべきであり，正則部分と反正則部分の双線形形式としてモノドロミー不変となるような**物理的相関関数**を求めることが必要となる．正則あるいは反正則部分のみに依存する (モノドロミーのある) 相関関数は，この意味で，物理的相関関数を構成するための補助的な構成要素であり，これを**共形ブロック**とよぶ．

19) これらの具体的な式が後の議論で必要になるわけではないので，その気になれば計算できるんだな，程度に眺めてもらえば十分である．

土屋と蟹江は，物理的相関関数を構成するための補助的対象であった共形ブロックを理論の基本対象としてとらえ，そのモノドロミーを具体的に計算して，後に述べるように，Hecke 環や量子群の表現との密接な関連を発見した[20]．本書でも，相関関数とよんでいるのは，物理的相関関数ではなく，その正則部分である共形ブロックのことである．対応する理論を**カイラル共形場理論**ともいう．なお，カイラルとは右巻・左巻というときの「巻き方」のことである．

こうして，共形ブロックの重要性が認識され，物理的相関関数は正則部分と反正則部分のモノドロミー不変な双線形形式である，という主張が一般原理として確立するのであるが，一方，同じ頃，この一般原理 (物理的スローガン) は，Friedan-Shenker により幾何学的に定式化された[21]．彼らの構想では，共形ブロックは，(一般には点付きの) Riemann 面のモジュライ空間のあるベクトル束 E の正則切断であり，モノドロミーは Riemann 面の写像類群の作用のベクトル束 E における表現を与え，物理的相関関数は E 上のモノドロミー不変な Hermite 内積により与えられる．さらに，この共形ブロックについて，弦理論の考察から，Riemann 面の退化において因子化とよばれる特徴的な振舞いが期待された．

以上の内容を，例に即して説明しよう．考えるのは Virasoro 代数の重み $h_{2,1}$ の primary 場の 4 点関数である (3.8 節参照).

$$\left\langle \Phi(z_4)\Phi(z_3)\Phi(z_2)\Phi(z_1)\right\rangle = \left(\frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{23}z_{14}z_{24}}\right)^{2h} f(z), \quad z = \frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{34}} \tag{5.154}$$

これは $SL(2,\mathbf{C})$ 不変性のため，実質，1 変数 z の関数 $f(z)$ になる．複比 z は 4 点付き Riemann 球面のモジュライであり，$f(z)$ は $(\alpha,\beta,\gamma)=(1-t,2-3t,2-2t)$ とした超幾何微分方程式を満たす．超幾何微分方程式の確定特異点 $z=0,1,\infty$ は，それぞれ $z_{13}z_{24}=0$, $z_{14}z_{23}=0$, $z_{12}z_{34}=0$ に対応し，$\Phi(z_1)$ が $\Phi(z_i)$ $(i=3,4,2)$ に近づいた場合の特異性を表している．z_1 と z_2 が近づくことは，スケール変換により，z_3 と z_4 が近づくことと同等であり，図 5.2 のような Riemann 面の退化極限に対応している．

式 (3.131) の合成則 $[2,1]\otimes[2,1]=[1,1]\oplus[3,1]$ より，図 5.2 の i として可能な**中間状態**は $\Phi_{1,1}$ または $\Phi_{3,1}$ の 2 通りであり，対応する 2 次元の解が存在

20) A. Tsuchiya and Y. Kanie, "Vertex Operators in Conformal Field Theory on $\mathbf{P}^1$ and Monodromy Representations of Braid Groups", 巻末文献 [4] 297–372, (Errata 巻末文献 [5] 675–682).

21) D. Friedan and S. Shenker, "The analytic geometry of two dimensional conformal field theory", Nucl. Phys. **B281** (1987) 509–545.

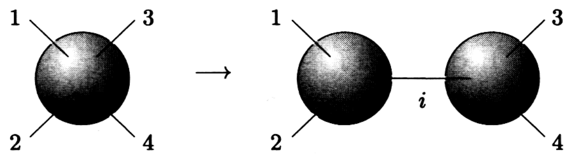


図 5.2　Riemann 球面の 4 点の退化

する．解 $f(z)$ の基本系は次のようにとれる．

$$G_0 = \begin{bmatrix} w_1(z) \\ z^{2t-1}w_2(z) \end{bmatrix}, \qquad G_1 = \begin{bmatrix} w_1(1-z) \\ (1-z)^{2t-1}w_2(1-z) \end{bmatrix},$$

$$G_\infty = \begin{bmatrix} (-z)^{3t-2}w_1(z^{-1}) \\ (-z)^{t-1}w_2(z^{-1}) \end{bmatrix}, \tag{5.155}$$

$$w_1(z) = \frac{\Gamma(1-t)^2}{\Gamma(2-2t)}F(1-t, 2-3t, 2-2t, z),$$

$$w_2(z) = \frac{\Gamma(1-t)\Gamma(3t-1)}{\Gamma(2t)}F(1-t, t, 2t, z).$$

これらの解の接続関係は次で与えられる．

$$G_0 = K_{01}G_1 = K_{0\infty}G_\infty,$$

$$K_{01} = \frac{-q^{\frac{1}{2}}}{1+q}\begin{bmatrix} 1 & q^{-1}+1+q \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{5.156}$$

$$K_{0\infty} = \frac{-q^{\frac{1}{2}}}{1+q}\begin{bmatrix} 1 & q^{-1}+1+q \\ -q & q \end{bmatrix}.$$

ここに $q = e^{2\pi it}$ であり，

$$K_{01}^2 = 1, \qquad K_{0\infty}^2 = q^{\frac{3}{2}}, \qquad K_{0\infty} = \mathrm{diag}(1, -q)K_{01} \tag{5.157}$$

の関係が成り立つ．そこで，天下り的であるが，

$$f(z, \bar{z}) = |w_1(z)|^2 + (q^{-1}+1+q)|z^{2t-1}w_2(z)|^2 \tag{5.158}$$

とすると，これがモノドロミー不変であることが確かめられる．これより物理

的相関関数が，比例定数を除いて

$$\left\langle \Phi(x_4,y_4)\cdots\Phi(x_1,y_1)\right\rangle = \left|\frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{23}z_{14}z_{24}}\right|^{2h} f(z,\bar{z}), \qquad z=\frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{34}} \tag{5.159}$$

と決定される．最近になって，天下り的に与えた不変 2 次形式の係数について，積分表示の (捻り) サイクルの交点数という解釈が与えられた[22]．

5.10 接続係数と場の交換関係

カイラルな相関関数の多価性を，作用素の立場から理解するために，Virasoro primary 場 $\Phi(z)=\Phi_{2,1}(z)$ の N 点関数を考える．

$$\Psi(z)=\left\langle \Phi(z_N)\Phi(z_{N-1})\cdots\Phi(z_2)\Phi(z_1)\right\rangle \tag{5.160}$$

これは，微分方程式 (式 (3.125) 参照)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z_i^2} - t\sum_{j(\neq i)}\left(\frac{h_{2,1}}{(z_i-z_j)^2}+\frac{1}{z_i-z_j}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\right]\Psi(z)=0 \tag{5.161}$$

を満たしていた．この独立な解を次のように構成する．まず，$\Phi(z_1)$ を真空 $\left|0\right\rangle \in V_{h_{1,1}}$ に作用させて $V_{h_{2,1}}$ のベクトル $\Phi(z_1)\left|0\right\rangle$ を与える．便宜上この元を

$$\Phi^+(z_1)\left|0\right\rangle \in V_{h_{2,1}} \tag{5.162}$$

と書く．これに $\Phi(z_2)$ を作用させた結果は，$V_{h_{3,1}}$ または $V_{h_{1,1}}$ の元として定まる．これを

$$\begin{aligned} &\Phi^+(z_2)\Phi^+(z_1)\left|0\right\rangle \in V_{h_{3,1}}, \\ &\Phi^-(z_2)\Phi^+(z_1)\left|0\right\rangle \in V_{h_{1,1}} \end{aligned} \tag{5.163}$$

と書く．さらに $\Phi(z_3)$ を作用させると，

$$\begin{aligned} &\Phi^+(z_3)\Phi^+(z_2)\Phi^+(z_1)\left|0\right\rangle \in V_{h_{4,1}}, \\ &\Phi^-(z_3)\Phi^+(z_2)\Phi^+(z_1)\left|0\right\rangle \in V_{h_{2,1}}, \\ &\Phi^+(z_3)\Phi^-(z_2)\Phi^+(z_1)\left|0\right\rangle \in V_{h_{2,1}} \end{aligned} \tag{5.164}$$

22) K. Mimachi and M. Yoshida, “Intersection Numbers of Twisted Cycles and the Correlation Functions of the Conformal Field Theory”, Comm. Math. Phys. **234** (2003) 339–358.

が得られる．これを繰り返せば，$\mathfrak{sl}_2$ の 2 次元表現のテンソル積と同じようにして独立な解が構成され，各々は

$$|z_N| > |z_{N-1}| > \cdots > |z_2| > |z_1| \tag{5.165}$$

で収束するベキ級数解を与える．とくに，真空期待値は Φ^+ と Φ^- が同数 ($m = N/2$) の場合に可能で，解空間の次元は $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ に対して Catalan 数 $1, 2, 5, 14, \ldots$ で与えられる (4.6 節).

基本的なのは，次の 2 点関数である．

$$\Psi_{ba}(w,z) = \left\langle\, h_{r+a+b} \,\middle|\, \Phi^b(w)\Phi^a(z) \,\middle|\, h_{r,s} \,\right\rangle, \quad a, b = \pm 1\,. \tag{5.166}$$

具体形は，$|z| < |w|$ において，超幾何級数を用いて

$$\begin{aligned}
\Psi_{++}(w,z) &= w^{\Delta_{++}} z^{\Delta_+} \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{\frac{t}{2}}, \\
\Psi_{-+}(w,z) &= w^{\Delta_{-+}} z^{\Delta_+} \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{\frac{t}{2}} F\left(t + rt - s, t, 1 + rt - s, \frac{z}{w}\right), \\
\Psi_{+-}(w,z) &= w^{\Delta_{+-}} z^{\Delta_-} \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{\frac{t}{2}} F\left(t - rt + s, t, 1 - rt + s, \frac{z}{w}\right), \\
\Psi_{--}(w,z) &= w^{\Delta_{--}} z^{\Delta_-} \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{\frac{t}{2}}
\end{aligned} \tag{5.167}$$

と与えられる．ここに

$$\begin{aligned}
\Delta_{a,b} &= h_{r+a+b,s} - h_{2,1} - h_{r+a,s}, \\
\Delta_a &= h_{r+a,s} - h_{2,1} - h_{r,s}
\end{aligned}$$

である．

超幾何級数の接続公式 (5.149) を用いて $\Psi_{ab}(w,z)$ (の $|w| < |z|$ への解析接続) と $\Psi_{ab}(z,w)$ との関係が求められる．結果は $\Phi^b(w)$ と $\Phi^a(z)$ との交換関係として表すことができる．primary 場の規格化を

$$\begin{aligned}
\left\langle\, h_{r+1,s} \,\middle|\, \Phi^+(z) \,\middle|\, h_{r,s} \,\right\rangle &= \frac{1}{\Gamma(1 + rt - s)} z^{\Delta_+}, \\
\left\langle\, h_{r-1,s} \,\middle|\, \Phi^-(z) \,\middle|\, h_{r,s} \,\right\rangle &= \frac{1}{\Gamma(1 - rt + s)} z^{\Delta_-}
\end{aligned} \tag{5.168}$$

となるように取り直すと結果が簡単になる．最終結果は

$$
\begin{aligned}
&q^{\frac{3}{4}}\Phi^+(w)\Phi^+(z) = \Phi^+(z)\Phi^+(w)q, \\
&q^{\frac{3}{4}}\Phi^+(w)\Phi^-(z) = \Phi^+(z)\Phi^-(w)\frac{(1-q)u}{1-u} + \Phi^-(z)\Phi^+(w)\frac{q-u}{1-u}, \\
&q^{\frac{3}{4}}\Phi^-(w)\Phi^+(z) = \Phi^+(z)\Phi^-(w)\frac{1-qu}{1-u} + \Phi^-(z)\Phi^+(w)\frac{q-1}{1-u}, \\
&q^{\frac{3}{4}}\Phi^-(w)\Phi^-(z) = \Phi^-(z)\Phi^-(w)q
\end{aligned}
\tag{5.169}
$$

となる．ただし $q = \exp(2\pi it)$, $u = \exp(2\pi i(rt - s))$ とおいた．交換関係 (5.169) の右辺の係数を 4×4 行列とみなせば，その固有値は $q, q, q, -1$ である．左辺の因子も考慮すれば，z と w の入れ替え操作を表す 4×4 行列の固有値は $q^{1/4}, q^{1/4}, q^{1/4}, -q^{-3/4}$ となる．この固有値は，2 つの primary 場 $\Phi = \Phi_{2,1}$ の 4 種類の積 $\Phi^b(w)\Phi^a(z)$ が重み $h_{1,1}$ の 1 重項と重み $h_{3,1}$ の 3 重項に分解することに対応しており，それぞれの共形次元を使って

$$
e^{\pi i(h_{1,1} - 2h_{2,1})} = q^{-3/4}, \qquad e^{\pi i(h_{3,1} - 2h_{2,1})} = q^{1/4} \tag{5.170}
$$

のように計算される．

この交換関係 (5.169) を，2^N 個の Φ の積

$$
\Phi(z_N)^{a_N} \cdots \Phi(z_1)^{a_1} \qquad (a_i = \pm 1) \tag{5.171}
$$

の $\Phi(z_{i+1}), \Phi(z_i)$ に作用させる操作を B_i $(1 \leq i \leq N-1)$ と表す．これらは**組紐関係式**

$$
\begin{aligned}
&B_i B_{i+1} B_i = B_{i+1} B_i B_{i+1} \quad (1 \leq i \leq N-2), \\
&B_i B_j = B_j B_i \quad (|i-j| > 1)
\end{aligned}
\tag{5.172}
$$

を満たし，**組紐群**を生成する．固有値の関係より

$$
(B_i - q^{\frac{1}{4}})(B_i + q^{-\frac{3}{4}}) = 0 \tag{5.173}
$$

も満たすので，**岩堀–Hecke 代数**の表現になっている．組紐関係式の 2 番目は自明である．1 番目の式は，交換関係を繰り返して用いた 2 通りの計算

$$
\begin{aligned}
&\Phi(z)\Phi(y)\Phi(x) \to \Phi(z)\Phi(x)\Phi(y) \to \Phi(x)\Phi(z)\Phi(y) \to \Phi(x)\Phi(y)\Phi(z), \\
&\Phi(z)\Phi(y)\Phi(x) \to \Phi(y)\Phi(z)\Phi(x) \to \Phi(y)\Phi(x)\Phi(z) \to \Phi(x)\Phi(y)\Phi(z)
\end{aligned}
\tag{5.174}
$$

が同じ結果を与えることを保証するもので．これは直接計算で確かめることができる．その際，変数 u は，中間状態 $V_{h_{r,1}}$ を指定するラベル r に依存し，$\Phi^{\pm}$ は r を ± 1 だけ変化させるので

$$f(u)\Phi^{\pm}(z) = \Phi^{\pm}(z)f(q^{\pm 1}u) \tag{5.175}$$

となることに注意する．

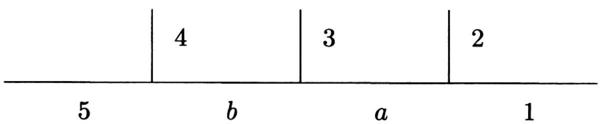
以上の事情を，少し一般的に整理しておこう．微分方程式の解として与えられる相関関数

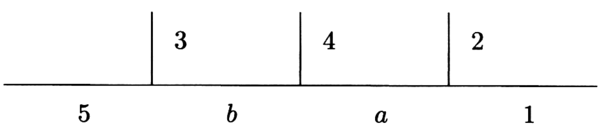
$$\left\langle \Phi_N(z_N)\cdots\Phi_1(z_1)\right\rangle \tag{5.176}$$

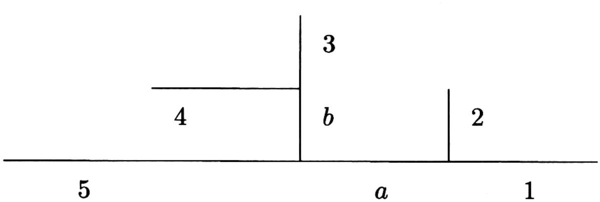
は一意ではない．これは primary 場の積の任意性に由来する．例えば，$\Phi_1(z_1)$ と $\Phi_2(z_2)$ の作用素積

$$\Phi_2(z_2)\Phi_1(z_1) = (z_2 - z_1)^{h_a - h_1 - h_2}\Phi_a(z_1) + \cdots \tag{5.177}$$

から生ずる primary 場 Φ_a には，合成規則から許されるいくつかの場合があり，さらに，この Φ_a と Φ_3 との合成にもいくつかの場合があり，といったぐあいに，いろいろな相関関数が構成されるのである．いまは Φ_1 に Φ_2 を合成し，その結果得られた Φ_a に Φ_3 を合成し，と進めたが，こうした合成の順序を変えることにより，さらに別の相関関数を構成できる．こうした得られる種々の相関関数を，次のようなダイアグラムによって表そう．

$P^1_{a,b} =$ 

$P^2_{a,b} =$ 

$P^3_{a,b} =$ 

$P^1_{a,b}$, $P^2_{a,b}$, $P^3_{a,b}$ はそれぞれ

$$P^1 = \Phi_5(\Phi_4(\Phi_3(\Phi_2\Phi_1))),$$
$$P^2 = \Phi_5(\Phi_3(\Phi_4(\Phi_2\Phi_1))), \tag{5.178}$$
$$P^3 = \Phi_5((\Phi_4\Phi_3)(\Phi_2\Phi_1))$$

のような合成順序に対応し，可能な中間状態 a, b を指定すると，それぞれが解空間の一次独立な基底をなす[23]．接続行列は，このような基底の変換行列である．

このような解釈から得られる一つの重要な結論は，接続係数の局所性である．例えば，図 5.3，図 5.4 に示した変換に対応する係数行列は，これらの図形がより大きな図形の一部になっている場合でも，関与する状態のラベル a, b, i, j, p, q のみによって局所的に決まっている．前者を**ブレイド行列**，後者を**フュージョン行列**とよぶ．

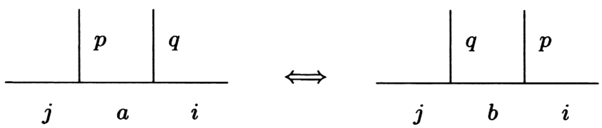


図 5.3　ブレイド変換

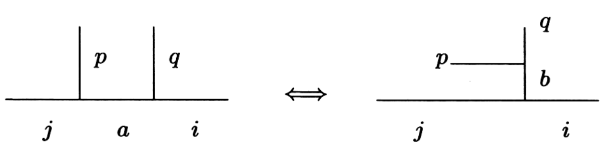


図 5.4　フュージョン変換

$\mathbf{P}^1$ 上の N 点関数の任意の接続係数はこれらブレイド行列，フュージョン行列の合成で得られる．合成の方法が複数ある場合には，整合性の条件として関係式が得られる．基本関係式は**ブレイド関係式**および**ペンタゴン関係式**であり，それぞれ図 5.5，図 5.6 で表される．

後者は，次章で重要な役割を果たす．

---

23)　ここでは議論を簡単にするため，指定した a, b, c に対して，積 $\Phi_a\Phi_b$ から Φ_c を合成する方法は定数倍を除いて一意であるとした．

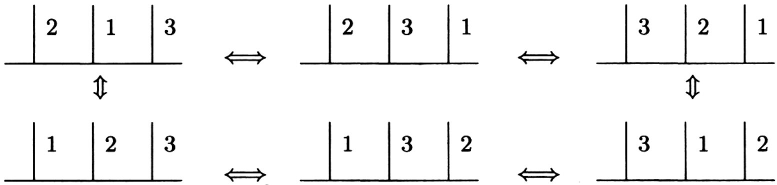


図 5.5　ブレイド関係式

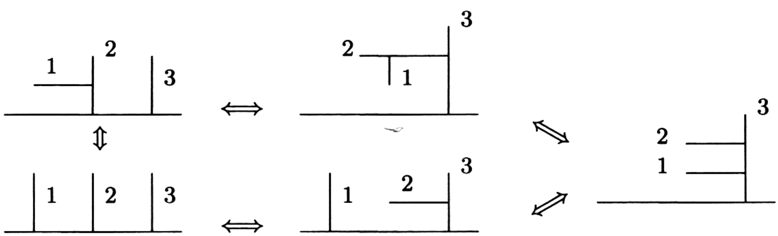


図 5.6　ペンタゴン関係式

5.11　交換関係の計算例

自由場表示の応用として，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に primary 場の交換関係を求めてみよう[24)]. primary 場の交換関係は相関関数の接続係数であるから，微分方程式の解 (とくに積分表示) から求めるのが標準的方法である．しかし，積分表示の基礎である自由場表示から，直接交換関係を求めることもできる．実際，以下の計算は，積分表示の積分路の操作によって接続係数を求める計算 (これは素人には結構難しい) を，機械的に処理する便法を与える．

自由場表示での一般の primary 場は，頂点作用素に遮蔽カレントを作用させて得られる．$\mathfrak{sl}_2$ の場合，スピン j 表現 $(2j+1$ 次元) の頂点作用素は

$$V_j(z) = :e^{j\varphi(z)}:, \tag{5.179}$$

また，遮蔽カレントは

$$s(z) = \beta(z) :e^{-\varphi(z)}: \tag{5.180}$$

24) T. Ito and Y. Yamada, “Explicit exchange relations in the $SL(2)$ Wess-Zumino-Novikov-Witten model”, Int. J. Mod. Phys. **A6** (1991) 3283–3291.

と表すことができる．ここに φ は

$$\varphi(z)\varphi(w) = \frac{2}{\kappa}\log(z-w) + :\varphi(z)\varphi(w): \tag{5.181}$$

の OPE をもつ自由 boson 場である (ここでの計算では κ は整数でなくてもよい)．頂点作用素の積

$$V_{j_1}(z_1)\cdots V_{j_n}(z_n) \tag{5.182}$$

は，z_i が実数で $z_1 < z_2 < \cdots < z_n$ の順序のときに実となるような分枝をとる．それ以外の順序では，反時計回りに解析接続したものとして定義する．この約束より，次の交換関係が得られる (以下 x, y は実数で $x > y > 0$, また $q = e^{2\pi i/\kappa}$)．

$$\begin{aligned}
V_{j_1}(x)V_{j_2}(y) &= q^{j_1 j_2}V_{j_2}(y)V_{j_1}(x),\\
s(x)V_j(y) &= q^{-j}V_j(y)s(x),\\
V_j(x)s(y) &= q^{-j}s(y)V_j(x),\\
s(x)s(y) &= qs(y)s(x).
\end{aligned} \tag{5.183}$$

遮蔽作用素を

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \int_0^x dzs(z),\\
Q(y,x) &= \int_y^x dzs(z) = Q(x) - Q(y)
\end{aligned} \tag{5.184}$$

とおけば，

$$\begin{aligned}
Q(x)Q(y) &= \Big(Q(y) + Q(y,x)\Big)Q(y)\\
&= Q(y)\Big(Q(y) + qQ(y,x)\Big)\\
&= qQ(y)Q(x) + (1-q)Q(y)^2,
\end{aligned} \tag{5.185}$$

したがって帰納法により

$$Q(x)Q(y)^n = q^n Q(y)^n Q(x) + (1-q^n)Q(y)^{n+1} \tag{5.186}$$

が成り立つ．そこで，m 重に遮蔽された頂点作用素を

$$V_j^m(x) = V_j(x)Q(x)^m \tag{5.187}$$

で定義する．このとき，次の交換関係が成り立つ．

$$V_{j_1}^m(x)V_{j_2}^n(y) = \sum_{k,l} V_{j_2}^k(y)V_{j_1}^l(x)R_{m,n}^{k,l} \tag{5.188}$$

ここで，和は $k, l \geq 0$, $k+l = m+n$ にわたる．この係数 $R_{m,n}^{k,l}$ を求めるために，まず，$m=0$ の場合を考える．

$$\begin{aligned} V_{j_1}^0(x)V_{j_2}^n(y) &= V_{j_1}(x)V_{j_2}(y)Q(y)^n = q^{j_1 j_2}V_{j_2}(y)V_{j_1}(x)Q(y)^n \\ &= q^{j_1 j_2 - j_1 n}V_{j_2}(y)Q(y)^n V_{j_1}(x) = q^{j_1(j_2-n)}V_{j_2}^n(y)V_{j_1}^0(x) \end{aligned} \tag{5.189}$$

より

$$R_{0,n}^{k,l} = q^{j_1(j_2-n)}\delta_{l,0} \tag{5.190}$$

である．次に，$R_{m,n}^{k,l}$ の漸化式を求めよう．(5.188) に左から $Q(x)$ をかけると，

$$Q(x)V_{j_1}^m(x) = q^{j_1}V_{j_1}^{m+1}(x) \tag{5.191}$$

より，左辺は

$$q^{j_1}V_{j_1}^{m+1}(x)V_{j_2}(y) \tag{5.192}$$

となる．一方，右辺では

$$\begin{aligned} Q(x)V_{j_2}^k(y) &= V_{j_2}(y)\Big(q^{j_2}Q(y) + q^{-j_2}Q(y,x)\Big)Q(y)^k \\ &= (q^{j_2} - q^{-j_2})V_{j_2}^{k+1} + q^{-j_2}V_{j_2}Q(x)Q(y)^k \\ &= (q^{j_2} - q^{-j_2})V_{j_2}^{k+1} + q^{-j_2}V_{j_2}\Big(q^kQ(y)^kQ(x) + (1-q^k)Q(y)^{k+1}\Big) \end{aligned} \tag{5.193}$$

より

$$Q(x)V_{j_2}^k(y)V_{j_1}^l(x) = (q^{j_2} - q^{-j_2+k})V_{j_2}^{k+1} + q^{j_1-j_2+k}V_{j_2}^k(y)V_{j_1}^{l+1}(x). \tag{5.194}$$

したがって

$$q^{j_1}R_{m+1,n}^{k,l} = (q^{j_2} - q^{-j_2+k-1})R_{m,n}^{k-1,l} + q^{j_1-j_2+k}R_{m,n}^{k,l-1} \tag{5.195}$$

を得る．この漸化式 (5.194) と初期条件 (5.190) より

$$R_{m,n}^{k,l} = q^{(j_1-m)(j_2-k)-(m-l)(m+l+1)/2}\frac{[m]!\,[2j_2-n]!}{[l]!\,[m-l]!\,[2j_2-k]!}, \tag{5.196}$$

ただし

$$[n]! = (q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)$$

が得られる．

この $R^{k,l}_{m,n}$ は量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の R 行列と一致している．量子群は Drinfel'd と神保によって発見された包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の良い q 変形 $U_q(\mathfrak{g})$ であり，変形前 $q=1$ と本質的に異なる性質はテンソル積の同型

$$R : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$$

が単なる入れ換えでなく，非自明な変換となる点である．この R を R 行列とよんでいる[25)]．上記の一致は遮蔽された頂点作用素 (5.187) が量子群の表現をなすことを意味している．より一般に，affine Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ の遮蔽作用は量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の Serre 関係式に従い $U_q(\mathfrak{n}_-)$ を生成することが知られている[26)]．

最後に，微分作用素表現のもう一つの応用として $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の可積分表現の間に作用する primary 場の合成則を導いておこう．$\mathfrak{sl}_2$ の $2j+1$ 次元表現 (スピン j 表現) に属する primary 場は $2j+1$ 成分のベクトル値作用素である．その交換関係を次のように表す．

$$\begin{aligned}
&[F_n, \Phi_j(z,x)] = z^n \frac{\partial}{\partial x}\Phi_j(z,x),\\
&[H_n, \Phi_j(z,x)] = z^n\Big(-x\frac{\partial}{\partial x}+j\Big)\Phi_j(z,x), \qquad (5.197)\\
&[E_n, \Phi_j(z,x)] = z^n\Big(-x^2\frac{\partial}{\partial x}+2jx\Big)\Phi_j(z,x).
\end{aligned}$$

ここに，$\Phi_j(z,x)$ は x について $2j$ 次の多項式で，その各係数が $\Phi_j(z)$ の $2j+1$ 個の成分を与える．$\big|\, j \,\big\rangle$ を最高重み $(\lambda_0,\lambda_1)=(k-2j,2j)$ $(0\le 2j\le k)$ の $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の可積分表現の最高重みベクトル，$\big\langle\, j \,\big|$ をその双対表現の最低重みベクトルとする．L_0 および H_0 との交換関係より，期待値 $\big\langle\, j_3 \,\big|\, \Phi_{j_2}(z,x) \,\big|\, j_1 \,\big\rangle$ は，適当な規格化の下で

$$\big\langle\, j_3 \,\big|\, \Phi_{j_2}(z,x) \,\big|\, j_1 \,\big\rangle = z^{\Delta}x^{q} \qquad (5.198)$$

となる．ここに

$$\Delta = h_{j_1}+h_{j_2}-h_{j_3}, \qquad h_j = \frac{j(j+1)}{k+2}, \qquad q = j_1+j_2-j_3$$

25)　affine Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ に付随する KZ 方程式のモノドロミーと量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現の関係は，土屋–蟹江，河野 (いずれも巻末文献 [4])，V.G. Drinfel'd, "Quasi-Hopf algebras", Leningrad Math. J. **1** (1990) 1419–1457 により明らかにされた．

26)　P. Bouwknegt, J. McCarthy and K. Pilch, "Free Field Approach to 2-Dimensional Conformal Field Theories", Prog. Theor. Phys. Suppl. **102** (1990) 67–135.

である．$|\,j_1\,\rangle$ からは，2つの基本的な特異ベクトル $F_0^{2j_1+1}\,|\,j_1\,\rangle$, $E_{-1}^{k-2j_1+1}\,|\,j_1\,\rangle$ がつくられる．これら特異ベクトルを含む相関関数が 0 となる条件を求めると

$$\begin{aligned} \langle\, j_3\,|\,\Phi_{j_2}(z,x)F_0^n\,|\,j_1\,\rangle &= \prod_{i=0}^{n-1}(q-i)z^{\Delta}x^{q+n}, \\ \langle\, j_3\,|\,\Phi_{j_2}(z,x)E_{-1}^n\,|\,j_1\,\rangle &= \prod_{i=0}^{n-1}(2j_2-q-i)z^{\Delta+n}x^{q-n} \end{aligned} \tag{5.199}$$

より

$$\prod_{i=0}^{2j_1}(q-i) = \prod_{i=0}^{k-2j_1}(2j_2-q-i) = 0 \tag{5.200}$$

となる．したがって，与えられた j_1, j_2 に対して，許される j_3 の値は

$$|j_1-j_2| \leq j_3 \leq \min(j_1+j_2, k-j_1-j_2) \qquad (j_1+j_2+j_3 \in \mathbf{Z}) \tag{5.201}$$

となる[27]．$\langle\, j_3\,|$ のもつ特異ベクトルから得られる条件もこれと同じである．なお，レベル k が十分大きい場合には $\mathfrak{sl}_2$ の Clebsch-Gordan 規則にもどる．

27) 合成則 (5.201) は，D. Gepner and E. Witten, "String theory on group manifolds", Nucl. Phys. **278** (1986) 493–549 により得られた．ここでの導出は，H. Awata and Y. Yamada, "Fusion rules for the fractional level $\widehat{\mathrm{sl}(2)}$ algebra", Mod. Phys. Lett. **7** (1992) 1185–1195 に基づく．後者はレベル k が有理数の場合の議論も含む．

6章

Riemann面上の理論

本章では，一般の Riemann 面における共形場理論を考察し，とくにトーラス上の理論について具体的計算を実行する．Riemann 面の退化において期待される相関関数の挙動 (因子化) と Verlinde 公式について説明する．

6.1 モジュラー変換

いままでは Riemann 球面における共形場理論を考察してきた．これを一般の Riemann 面における共形場理論に拡張することを考える．まずは，トーラス上の共形場理論を考察する．(複素) トーラス T は，複素平面 $\mathbf{C}$ を，2 つの基本周期による平行移動により同一視して構成される．

$$T = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau) \tag{6.1}$$

ここでは，基本周期を $(1,\tau)$，$\mathrm{Im}\ \tau > 0$ と選んだ．トーラス T 上の関数は

$$f(z+1) = f(z+\tau) = f(z) \tag{6.2}$$

を満たす二重周期関数，つまり**楕円関数**である．$e^{2\pi i\tau} = q$ とおき，変数 $e^{2\pi iz} = x$ で書き直せば

$$f(qx) = f(x) \tag{6.3}$$

となる．トーラス上の点は z 平面では平行四辺形 (対辺を同一視)，x 平面では輪環領域 (周を同一視) によってそれぞれ表される (図 6.1).

基本周期のとり方は，

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z}) \tag{6.4}$$

の任意性がある．すなわち，トーラス T はモジュラス τ を (6.4) によって変化

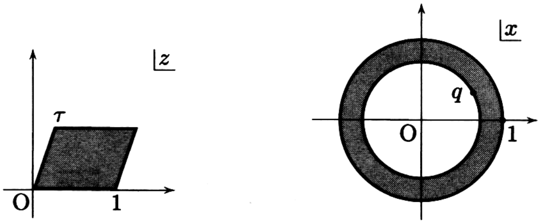


図 6.1 トーラス

させても不変である．これを，トーラスの**モジュラー変換**という．モジュラー変換群は，2 つの生成元

$$T(\tau) = \tau + 1, \qquad S(\tau) = -\frac{1}{\tau} \tag{6.5}$$

によって生成される．実際

$$g(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{6.6}$$

において，$c = 0$ ならば $g = T^b$，$c = 1$ ならば $g = T^a S T^b$ とすればよく，$c > 1$ の場合には a/c の連分数展開

$$\frac{a}{c} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{k_n}}}} \qquad (k_i \in \mathbf{Z},\ n \text{ は奇数}) \tag{6.7}$$

より，

$$g = T^{k_0} S T^{-k_1} S T^{k_2} S \cdots T^{-k_n} S$$

とすればよい．したがって，モジュラー変換を調べるには，T および S 変換への応答をみておけば十分である．

例として，Jacobi テータ関数のモジュラー変換をみておこう．Jacobi テータ関数 $\vartheta_i(z,\tau)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ は，$q = e^{2\pi i\tau}$, $x = e^{2\pi i z}$ として

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(z,\tau) &= i \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n x^{n-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})^2}, \\
\vartheta_2(z,\tau) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} x^{n-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})^2}, \\
\vartheta_3(z,\tau) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} x^n q^{\frac{1}{2}n^2}, \\
\vartheta_4(z,\tau) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-x)^n q^{\frac{1}{2}n^2}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

により定義される[1]．これらのモジュラー変換は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\vartheta_1(z,\tau+1) &= \epsilon\vartheta_1(z,\tau),\\
\vartheta_2(z,\tau+1) &= \epsilon\vartheta_2(z,\tau),\\
\vartheta_3(z,\tau+1) &= \vartheta_4(z,\tau),\\
\vartheta_4(z,\tau+1) &= \vartheta_3(z,\tau),\\
\vartheta_1\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right) &= -ia\vartheta_1(z,\tau),\\
\vartheta_2\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right) &= a\vartheta_4(z,\tau),\\
\vartheta_3\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right) &= a\vartheta_3(z,\tau),\\
\vartheta_4\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right) &= a\vartheta_2(z,\tau).
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

ここに，

$$
\epsilon = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right), \qquad a = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\exp\left(\pi i\frac{z^2}{\tau}\right)
$$

である．

T 変換の導出はやさしい．S 変換の式を示すため **Poisson の和公式**

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n) &= \sum_{m\in\mathbf{Z}} e^{-2\pi imx}\tilde{f}(m),\\
\tilde{f}(m) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi imx} f(x)dx
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

を用いる．これは，周期関数 $F(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n)$ (周期 1) の Fourier 展開にほかならない．$f(n)=e^{\pi in^2+2\pi inz}$ の場合，Gauss 積分より $\tilde{f}(m)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}e^{-\frac{\pi i}{\tau}(m-z)^2}$ となるので，これを和公式 (6.10) で $x=0$ としたものに代入して，ϑ_3 の S 変換が得られる．ほかの ϑ_i の変換はこれから導かれる．

---

1) 後述 (6.69) の Riemann テータ関数 $\Theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z|\tau) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{\pi i(n+a)^2+2\pi i(n+a)(z+b)}$ ($g=1$ の場合) との対応は，

$$
\vartheta_1(z,\tau) = -\Theta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(z|\tau), \qquad \vartheta_2(z,\tau) = \Theta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}(z|\tau),
$$

$$
\vartheta_3(z,\tau) = \Theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z|\tau), \qquad \vartheta_4(z,\tau) = \Theta\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(z|\tau).
$$

また，Dedekind エータ関数

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \tag{6.11}$$

のモジュラー変換は

$$\eta(\tau + 1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(\tau), \qquad \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\eta(\tau) \tag{6.12}$$

である．

Jacobi 三重積公式 (2.128) を使うと，次の無限積表示が得られる．

$$\begin{aligned}
Z_{\mathrm{NS},-} = Z_{0,0} &= \frac{\vartheta_3(z,\tau)}{\eta(\tau)} = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^{n-\frac{1}{2}})(1 + x^{-1}q^{n-\frac{1}{2}}), \\
Z_{\mathrm{NS},+} = Z_{0,\frac{1}{2}} &= \frac{\vartheta_4(z,\tau)}{\eta(\tau)} = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - xq^{n-\frac{1}{2}})(1 - x^{-1}q^{n-x\frac{1}{2}}), \\
Z_{\mathrm{R},-} = Z_{\frac{1}{2},0} &= \frac{\vartheta_2(z,\tau)}{\eta(\tau)} = x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^{n})(1 + x^{-1}q^{n-1}), \\
Z_{\mathrm{R},+} = Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \frac{-\vartheta_1(z,\tau)}{\eta(\tau)} = ix^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - xq^{n})(1 - x^{-1}q^{n-1}).
\end{aligned} \tag{6.13}$$

これらは，自由 fermion $\overline{\psi}$, ψ の NS および Ramond の表現空間におけるトレース

$$Z_{\mathrm{NS/R},\pm}(z,\tau) = \mathrm{tr}_{\mathrm{NS/R}}\left((\pm x)^{J_0} q^{L_0 - \frac{c}{24}}\right)$$

に等しい．これより，とくに，

$$Z_{a,b}(0,\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)} \Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (0|\tau) \tag{6.14}$$

は，トーラス $T = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ の対辺において，(反) 周期的境界条件

$$\psi(z+1) = -e^{\pi i a}\psi(z), \qquad \psi(z+\tau) = -e^{\pi i b}\psi(z) \tag{6.15}$$

($\overline{\psi}(z)$ についても同様) を課した自由 fermion 理論の分配関数という解釈が成り立つ．また，モジュラー変換 (6.9) は，これらの分配関数の境界条件の変化として解釈される．

Virasoro 代数や affine Lie 代数などの表現の指標も，モジュラー変換に対して互いに線形変換を受ける．ここでは，affine Lie 代数の指標のモジュラー変換を (結果のみ) 書いておこう．(非 twist 型) affine Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現の指

標は，レベルを k，最高重みを

$$\lambda \in P_+^k = \{\lambda \in P \mid 0 \le (\lambda, \theta) \le k\}$$

として

$$\chi_\lambda(z,\tau) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{|w|} \Theta_{w(\lambda+\rho),k+h^\vee}}{\sum_{w \in W} (-1)^{|w|} \Theta_{w(\rho),h^\vee}},$$

$$\Theta_{\lambda,k}(z,\tau) = \sum_{\mu \in kQ^\vee + \lambda} e^{\pi i \tau (\mu,\mu)/k + 2\pi i (z,\mu)}. \tag{6.16}$$

であった ($z \in \mathfrak{h}$)．このモジュラー変換は次で与えられる．

$$\chi_\lambda(z,\tau+1) = q^{\Delta_\lambda} \chi_\lambda(z,\tau),$$

$$\chi_\lambda\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{\mu \in P_+^k} S_{\lambda,\mu} \chi_\mu(z,\tau). \tag{6.17}$$

ここに $\Delta_\lambda = h_\lambda - \dfrac{c}{24}$ であり，また，S 変換の行列 $(S_{\lambda,\mu})$ は，$\mathfrak{g}$ の既約指標 ch_λ を用いて

$$S_{\lambda,\mu} = S_{\lambda,0} \mathrm{ch}_\mu (e^{-\frac{2\pi i}{k+h^\vee}(\lambda+\rho)}),$$

$$S_{\lambda,0} = |P/(k+h^\vee)Q^\vee|^{-\frac{1}{2}} \prod_{\alpha>0} 2 \sin\left(\frac{\pi(\lambda+\rho,\alpha)}{k+h^\vee}\right) \tag{6.18}$$

で与えられる[2)]．なお，$|P/(k+h^\vee)Q^\vee|$ は重み格子 P の $(k+h^\vee)Q^\vee$ による商の位数を表す．

6.2　モジュラー不変量

$\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の最高重み $(\lambda_0, \lambda_1) = (k-l, l)$ に対する可積分表現を考える．k はこの表現のレベルであり，Virasoro 代数の中心 c と最高重みベクトルの共形次元 $h = h_l$ は

$$c = \frac{3k}{k+2}, \qquad h_l = \frac{l(l+2)}{4(k+2)} \tag{6.19}$$

で与えられる．この表現の指標

$$\chi_l = \mathrm{tr}_{L_l}(q^{L_0 - \frac{c}{24}} z^{H_0}) \tag{6.20}$$

2)　例えば，文献 [11] 参照．

は，(6.16) より具体的に次のように与えられる．

$$\chi_l(z,\tau) = \frac{\theta_{l+1,k+2} - \theta_{-l-1,k+2}}{\theta_{1,2} - \theta_{-1,2}},$$
$$\theta_{l,k} = \theta_{l,k}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbf{Z}+\frac{l}{2k}} e^{2\pi i(kn^2\tau + knz)}. \tag{6.21}$$

モジュラー変換は次のとおりである．まず T 変換は簡単に

$$\chi_l(z,\tau+1) = q^{h_l - \frac{c}{24}}\chi_l(z,\tau) \tag{6.22}$$

で与えられる．一方，S 変換は

$$\chi_l\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{m=0}^{k} S_{l,m}\chi_m(z,\tau), \tag{6.23}$$

ここに

$$S_{l,m} = \sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin\left(\frac{\pi(l+1)(m+1)}{k+2}\right) \tag{6.24}$$

である．以下 $z=0$ と特殊化して

$$\chi_l(0,\tau) = \chi_l(\tau)$$

と書く．

モジュラー変換もモノドロミー変換と同様，物理的な分配関数・相関関数には現れないようにしなければならない．そのために，物理的な分配関数は，正則なカレント $J^a(z)$ の表現 V_l の指標 $\chi_l(\tau)$ と反正則なカレント $\overline{J}^a(\overline{z})$ の表現 $\overline{V_l}$ の指標 $\overline{\chi_l(\tau)}$ のモジュラー不変な双線形形式

$$Z = \sum_{l,m=0}^{k} N_{l,m}\overline{\chi_l}\chi_m \tag{6.25}$$

であると仮定される．$N_{l,m}$ は，表現 $\overline{V_l}\otimes V_m$ が物理的な状態空間に現れる多重度を表すので非負整数であり，真空状態の一意性として $(N_{0,0}=1)$ を課す．このような $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ モジュラー不変量は Cappelli, Itzykson, Zuber および加藤により，以下のように ADE 型に分類された[3]．

- A_{k+1} 型：

$$\sum_{l=0}^{k} |\chi_l|^2 \tag{6.26}$$

3) A. Cappelli, C. Itzykson and J.-B. Zuber, "The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories", Comm. Math. Phys. 113 (1987) 1–26; A. Kato, "Classification of modular invariant partition functions in two dimensions" Mod. Phys. Lett. **A2** (1987) 585–600.

• D_{n+2} 型 $(k=2n)$：

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0,\,偶数}^{n-2} |\chi_l+\chi_{k-l}|^2+2|\chi_n|^2 & (n:偶数), \\ \displaystyle\sum_{l=0,\,偶数}^{k} |\chi_l|^2+\sum_{l=1,\,奇数}^{k} \overline{\chi_l}\chi_{k-l} & (n:奇数) \end{cases} \tag{6.27}$$

• E_6 型 $(k=10)$：

$$|\chi_0+\chi_6|^2+|\chi_3+\chi_7|^2+|\chi_4+\chi_{10}|^2 \tag{6.28}$$

• E_7 型 $(k=16)$：

$$\begin{aligned}|\chi_0+\chi_{16}|^2+|\chi_4+\chi_{12}|^2+|\chi_6+\chi_{10}|^2+|\chi_8|^2 \\ +\overline{\chi_8}(\chi_2+\chi_{14})+\overline{(\chi_2+\chi_{14})}\chi_8\end{aligned} \tag{6.29}$$

• E_8 型 $(k=28)$：

$$|\chi_0+\chi_{10}+\chi_{18}+\chi_{28}|^2+|\chi_6+\chi_{12}+\chi_{16}+\chi_{22}|^2 \tag{6.30}$$

ADE 型の命名は，各場合に $N_{l,l}\neq 0$ となる $l+1$ が対応するルート系の Coxeter 指数となること (また $k+2$ が Coxeter 数となること) による．この分類が単純特異点の **ADE 分類**と直接関係することが後にわかる (7.2 節参照).

一般に，モジュラー不変量は，対角型不変量，対称性の拡大，および表現の置換により構成されることが知られている[4)]．このことを，上記の例について説明しておこう．

A 型のモジュラー不変量は，モジュラー変換行列がユニタリー行列であればいつでも存在する．これを**対角型不変量**という．

不変量 D_{2n} (n 偶数), E_6, E_8 は，**対称性の拡大**による不変量として説明される．例として E_6 不変量をみておこう．$k=10$ の場合 $c=\frac{5}{2}$ であり，5 個の fermion による実現が期待される．$k=10$ の可積分表現に対する l の値は $l=0,1,\ldots,10$ の 11 個である．対応する primary 場 Φ_l は $\mathfrak{sl}_2$ の $l+1$ 次元表現をなし，その共形次元を計算すると

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_l	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{35}{48}$	1	$\frac{21}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{33}{16}$	$\frac{5}{2}$

(6.31)

である．このデータより，primary 場 Φ_4 $(h_4=\frac{1}{2})$ は 5 成分の fermion と解釈

4) G. Moore and N. Seiberg, "Naturality in conformal field theory", Nucl. Phys. **B313** (1989) 16–40.

される．また，$(E, H, F$ に加えて$)$ 7 個の次元 1 のカレント Φ_6 の存在がわかる．実際，$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 指標の次の組合せ

$$\begin{aligned}
\chi_0+\chi_6 &= q^{-\frac{c}{24}}\frac{1}{2}\left(\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{n+\frac{1}{2}})^5+\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+\frac{1}{2}})^5\right)\\
&= q^{-\frac{c}{24}}(1+10q+30q^2+85q^3+\cdots),\\
\chi_4+\chi_{10} &= q^{-\frac{c}{24}}\frac{1}{2}\left(\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{n+\frac{1}{2}})^5-\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+\frac{1}{2}})^5\right)\\
&= q^{\frac{1}{2}-\frac{c}{24}}(5+15q+56q^2+130q^3+\cdots),\\
\chi_3+\chi_7 &= q^{\frac{5}{16}-\frac{c}{24}}4\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^n)^5\\
&= q^{\frac{5}{16}-\frac{c}{24}}(4+20q+60q^2+160q^3+\cdots)
\end{aligned} \tag{6.32}$$

は，それぞれ $\widehat{\mathfrak{sp}}_4$ のレベル $k=1$ 表現

$$(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)=(1,0,0),\quad (0,0,1),\quad (0,1,0)$$

の指標に一致する．そのモジュラー変換行列 S は

$$S=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

である．以上の結果から，$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の E_6 型モジュラー不変量は $\widehat{\mathfrak{sp}}_4$ $(k=1)$ の対角型不変量に由来することがわかる．同様に，E_8 型不変量は $\widehat{\mathfrak{g}}_2$ $(k=1)$ の対角型不変量に帰着される．$k=2n$ かつ n が偶数の場合，primary 場 Φ_k の共形次元 $h_k=k/4$ は整数となる．$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ に Φ_k を付加して得られる拡大代数は，$k=4$ の場合 $(\widehat{\mathfrak{sl}}_3, k=1)$ 以外はカレント代数ではないが，同様に対角的不変量が考えられ D_{n+2} (n: 偶数) を得る．

不変量 D_{n+2} (n: 奇数) は**置換**による不変量とよばれ，次のように説明される．すなわち，置換 σ を

$$\sigma(l)=\begin{cases} l & (l:\text{偶数})\\ 2n-l & (l:\text{奇数}) \end{cases} \tag{6.34}$$

とすると

$$h_{\sigma(l)}-h_l\in\mathbf{Z},\qquad S_{\sigma(l),\sigma(m)}=S_{l,m} \tag{6.35}$$

となる．これより

$$\sum_{l=0}^{k} \overline{\chi_l}\chi_{\sigma(l)} \tag{6.36}$$

という D_{2n} 型 (n: 奇数) 型不変量が得られる．最後に残った E_7 型不変量は，D_{10} 型不変量から置換により得られるものとして理解される．すなわち，$k=16$ の D_{10} 型不変量

$$|\chi_0+\chi_{16}|^2+|\chi_2+\chi_{14}|^2+|\chi_4+\chi_{12}|^2+|\chi_6+\chi_{10}|^2+|\chi_8|^2+|\chi_8|^2 \tag{6.37}$$

において $\chi_2+\chi_{14}$ と χ_8 が同じモジュラー変換性をもつこと (実は，その差は定数 $\chi_2+\chi_{14}-\chi_8=3$ である) に注意して，$\chi_2+\chi_{14}$ と χ_8 (の一つ) とを入れ換えることで得られるのが E_7 型不変量である．

6.3 トーラス上のストレステンソル

トーラス $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})$ 上のストレステンソル $T(z)$ の相関関数を計算しよう．以下の計算は，変数 τ, z よりも $q=e^{2\pi i\tau}$, $x=e^{2\pi iz}$ を用いる方が便利なので，ストレステンソル $T(z)$ は座標変換 $x=e^{2\pi iz}$ によって変換した式

$$\begin{aligned} T(z) &= T(x)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\frac{c}{12}\{x,z\}=(2\pi i)^2\widetilde{T}(x), \\ \widetilde{T}(x) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}}\widetilde{L}_n x^{-n}, \qquad \widetilde{L}_n=L_n-\frac{c}{24}\delta_{n,0} \end{aligned} \tag{6.38}$$

を用いる．$\widetilde{L}_n$ および $\widetilde{T}(x)$ の交換関係は

$$\begin{aligned} [\widetilde{L}_n,\widetilde{L}_m] &= (n-m)\widetilde{L}_{n+m}+\frac{c}{12}n^3\delta_{n+m,0}, \\ [\widetilde{L}_n,\widetilde{T}(x)] &= x^n\left(x\frac{d}{dx}+2n\right)\tilde{T}(x)+\frac{c}{12}n^3x^n \end{aligned} \tag{6.39}$$

で与えられる．

トーラス上の $T(z)$ の相関関数を Virasoro 代数の表現空間におけるトレースにより，

$$\langle T(z_1)\cdots T(z_N)\rangle=(2\pi i)^{2N}\mathrm{tr}\left[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(x_1)\cdots\widetilde{T}(x_N)\right] \tag{6.40}$$

のように定義する．

この相関関数について，N に関する漸化式を導こう．まず交換関係から

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{L}_n\widetilde{T}(x_1)\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]\\
&\quad=\sum_{i=1}^{N}\frac{c}{12}n^3x_i^n\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(x_1)\cdots\widehat{\widetilde{T}(x_i)}\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{N}x_i^n\Big(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+2n\Big)\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(x_1)\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]\\
&\qquad+\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(x_1)\cdots\widetilde{T}(x_N)\widetilde{L}_n\Big]
\end{aligned}\tag{6.41}$$

である (^ はその因子を除くことを意味する)．交換関係

$$[\widetilde{L}_0,\widetilde{L}_n]=-n\widetilde{L}_n$$

より

$$q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{L}_nq^{-\widetilde{L}_0}=q^{-n}\widetilde{L}_n$$

であるから，(6.41) の最後の項は，$q^n\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{L}_n\widetilde{T}(x_1)\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]$ と書き直すことができる．したがって $n\neq 0$ について

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{L}_n\widetilde{T}(x_1)\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]\\
&\quad=\sum_{i=1}^{N}\frac{c}{12}\frac{n^3x_i^n}{1-q^n}\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(x_1)\cdots\widehat{\widetilde{T}(x_i)}\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^n}{1-q^n}\Big(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+2n\Big)\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(x_1)\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]
\end{aligned}\tag{6.42}$$

が得られる．これより

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(x)\widetilde{T}(x_1)\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]\\
&\quad=\sum_{i=1}^{N}\frac{c}{12}\widetilde{E}_4\Big(\frac{x_i}{x}\Big)\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(x_1)\cdots\widehat{\widetilde{T}(x_i)}\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{N}\Big[2\widetilde{E}_2\Big(\frac{x_i}{x}\Big)+\widetilde{E}_1\Big(\frac{x_i}{x}\Big)x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big]\,\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(x_1)\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]\\
&\qquad+q\frac{\partial}{\partial q}\mathrm{tr}\Big[q^{\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(x_1)\cdots\widetilde{T}(x_N)\Big]
\end{aligned}\tag{6.43}$$

となる．ここに

$$\widetilde{E}_k(x)=\sum_{n\neq 0}\frac{n^{k-1}x^n}{1-q^n}\tag{6.44}$$

である．x_i 変数から z_i 変数にもどして書き換えると，次の式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\Bigl\langle T(z)T(z_1)\cdots T(z_N)\Bigr\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{c}{2} E_4(z-z_i)\Bigl\langle T(z_1)\cdots \widehat{T(z_i)}\cdots T(z_n)\Bigr\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N}\left[2E_2(z-z_i)+E_1(z-z_i)\frac{\partial}{\partial z_i}\right]\Bigl\langle T(z_1)\cdots T(z_N)\Bigr\rangle \\
&\quad + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}\Bigl\langle T(z_1)\cdots T(z_N)\Bigr\rangle \qquad (6.45)
\end{aligned}$$

ここに

$$E_k(z) = \frac{(2\pi i)^k \widetilde{E}_k(x)}{(k-1)!} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

は Eisenstein の関数

$$\begin{aligned}
&E_1(z) = \partial_z \log \vartheta_1(z) = \frac{1}{z} + \cdots, \\
&E_k(z) = -\frac{1}{k-1}\partial_z E_{k-1}(z) = \frac{1}{z^k} + \cdots \quad (k>1), \\
&E_1(z+1) = E_1(z), \qquad\qquad (6.46) \\
&E_1(z+\tau) = E_1(z) - 2\pi i, \\
&E_k(z+1) = E_k(z+\tau) = E_k(z) \qquad (k>1)
\end{aligned}$$

であり，Weierstrass の $\wp$ 関数，ζ 関数とは次の関係がある．

$$\begin{aligned}
&E_1(z) = \zeta(z) - 2\eta_1 z, \\
&E_2(z) = \wp(z) + 2\eta_1, \qquad\qquad (6.47) \\
&\eta_1 = \zeta\left(\frac{1}{2}\right) = (2\pi)^2\left[\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}\right].
\end{aligned}$$

定義 (6.40) より，相関関数 $\bigl\langle T(z_1)\cdots T(z_N)\bigr\rangle$ は各 z_j について対称で $(1,\tau)$ を基本周期とする楕円関数であり，極は $z_i = z_j$ のみ (高々 4 位) にあること，また，その主要部は，OPE

$$T(z)T(z_j) = \frac{c/2}{(z-z_j)^4} + \frac{2}{(z-z_j)^2}T(z_j) + \frac{1}{z-z_j}T'(z_j) + \cdots \qquad (6.48)$$

で与えられることがわかる．逆に，相関関数 $\bigl\langle T(z_1)\cdots T(z_n)\bigr\rangle$ は，これらの性質で特徴づけられる．実際，$(1,\tau)$ を基本周期とする楕円関数 $f(z)$ について，

その極を $z_1, \dots, z_n$ とし，$z = z_j$ での展開の主要部が

$$f(z) = \sum_{a=1}^{\nu_j} \frac{c_{j,a}}{(z - z_j)^a} \qquad (\sum_{j=1}^{n} c_{j,1} = 0)$$

であるとき，$f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{a=1}^{\nu_j} c_{j,a} E_a(z - z_j) + 定数 \tag{6.49}$$

と表される．この事実を $f(z) = \langle T(z)T(z_1)\cdots T(z_n)\rangle$ に適用すれば (6.45) が得られる．(ただし z に依存しない最後の項は決められない．)

さらに，$\Phi(z)$ を次元 h の primary 場とすると，座標変換 $x = e^{2\pi i z}$ により

$$\begin{aligned} &\Phi(z) = \Phi(x)\left(\frac{dx}{dz}\right)^h = (2\pi i)^h \widetilde{\Phi}(x), \qquad \widetilde{\Phi}(x) = x^h \Phi(x), \\ &[\widetilde{L}_n, \widetilde{\Phi}(x)] = x^n \left(x\frac{\partial}{\partial x} + hn\right)\tilde{\Phi}(x) \end{aligned} \tag{6.50}$$

となる．これから，上と同様の計算により，$\Phi_i(z)$ (次元 h_i) の挿入された相関関数 $\Psi = \langle T(z_1)\cdots T(z_n)\Phi_1(w_1)\cdots\Phi_m(w_m)\rangle$ について

$$\begin{aligned} &\langle T(z)T(z_1)\cdots T(z_n)\Phi_1(w_1)\cdots\Phi_m(w_m)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{c}{2} E_4(z - z_i) \langle T(z_1)\cdots \widehat{T(z_i)} \cdots T(z_n)\Phi_1(w_1)\cdots\Phi_m(w_m)\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \left[2E_2(z - z_i) + E_1(z - z_i)\frac{\partial}{\partial z_i}\right]\Psi \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m} \left[h_i E_2(z - w_i) + E_1(z - w_i)\frac{\partial}{\partial w_i}\right]\Psi + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}\Psi \end{aligned} \tag{6.51}$$

が得られる．以上の漸化式はトーラス上の相関関数の共形不変性を表す Ward 恒等式と解釈される[5]．

$g = 0$ の場合と同様に，特異ベクトルの挿入された相関関数が 0 になることを Ward 恒等式によって書き直して相関関数の微分方程式が得られる．例として，$c = \frac{1}{2}$ のミニマル模型 (Ising 模型) の指標の満たす微分方程式を導いてお

5) これらの Ward 恒等式は，一般の種数 g の場合も含めて江口・大栗により経路積分を用いて導かれた．T. Eguchi and H. Ooguri, "Conformal and current algebras on a general Riemann surface", Nucl. Phys. **B282** (1987) 308–328. Virasoro 代数の作用が Riemann 面のモジュライの変形を生ずることは，A. A. Beilinson, Yu. I. Manin and V. V. Schechtman, "Sheaves of the Virasoro and Neveu-Schwarz algebras", *K*-theory, arithmetic and geometry (Moscow,1984–1986), 52–66, Lecture Notes in Math., 1289, Springer, Berlin, (1987) で示された．

こう[6]．

指標 $\chi = \mathrm{tr}[q^{\widetilde{L}_0}]$ を恒等作用素 $\mathbf{1}$ の挿入された 1 点関数 $\chi = \langle \mathbf{1} \rangle$ とみなす．$c = \frac{1}{2}$ のとき，恒等作用素 $\mathbf{1}$ はレベル 6 に特異ベクトル

$$(64L_{-2}^3 + 93L_{-3}^2 - 264L_{-4}L_{-2} - 108L_{-6})\mathbf{1} = 0 \tag{6.52}$$

をもつ．ここに descendant 場 $L_n\mathcal{O}$ は，展開係数

$$T(z)\mathcal{O}(w) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n(z-w)^{-n-2}\mathcal{O}(w) \tag{6.53}$$

により定義される．展開式

$$E_1(z) = \frac{1}{z} - 2\eta_1 z - \frac{g_2}{60}z^3 - \frac{g_3}{140}z^5 - \frac{g_2^2}{8400}z^7 + \cdots,$$
$$g_2 = (2\pi)^4\left[\frac{1}{12} + 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^n}{1-q^n}\right], \quad g_3 = (2\pi)^6\left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}\right] \tag{6.54}$$

により

$$\begin{aligned}
&\langle L_{-6}\mathbf{1}\rangle = 0,\\
&\langle L_{-4}L_{-2}\mathbf{1}\rangle = \frac{cg_3}{28}\chi + \frac{g_2}{10}\chi',\\
&\langle L_{-3}^2\mathbf{1}\rangle = -\frac{cg_3}{14}\chi - \frac{g_2}{5}\chi',\\
&\langle L_{-2}^3\mathbf{1}\rangle = \frac{cg_3}{14}\chi + \left(24\eta_1^2 + \frac{3g_2}{10} + \frac{cg_2}{40}\right)\chi' + 12\eta_1\chi'' + \chi'''
\end{aligned} \tag{6.55}$$

が得られる．ここに $' = q\dfrac{\partial}{\partial q} = 2\pi i\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ はモジュライ τ による微分である．$c = \frac{1}{2}$ に注意して (6.52) に代入すれば，微分方程式

$$-\frac{23g_3}{256}\chi + \left(24\eta_1^2 - \frac{25g_2}{64}\right)\chi' + 12\eta_1\chi'' + \chi''' = 0 \tag{6.56}$$

を得る．解析的モジュライ変数 τ から代数的なモジュライ変数 $\lambda(\tau) = \vartheta_2^4/\vartheta_3^4$ に変換して書き直せば，$\lambda = 0, 1, \infty$ を特異点とする Fuchs 型方程式

$$\frac{d^3}{d\lambda^3}\chi - \frac{2(2\lambda-1)}{\lambda(1-\lambda)}\frac{d^2}{d\lambda^2}\chi + \frac{391\lambda(\lambda-1)+7}{192\lambda^2(1-\lambda)^2}\frac{d}{d\lambda}\chi$$
$$- \frac{23(2-\lambda)(1+\lambda)(2\lambda-1)}{24^3\lambda^3(1-\lambda)^3}\chi = 0 \tag{6.57}$$

6) T. Eguchi and H. Ooguri, "Differential equations for characters of Virasoro and affine Lie algebras", Nucl. Phys. **B313** (1989) 492–508.

に変換される．解の基底として

$$
\begin{aligned}
\lambda^{-\frac{1}{24}}(1-\lambda)^{-\frac{1}{24}} &= 2^{-\frac{1}{6}}q^{-\frac{1}{48}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-\frac{1}{2}}),\\
\lambda^{-\frac{1}{24}}(1-\lambda)^{\frac{1}{12}} &= 2^{-\frac{1}{6}}q^{-\frac{1}{48}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-\frac{1}{2}}),\\
\lambda^{\frac{1}{12}}(1-\lambda)^{-\frac{1}{24}} &= 2^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n})
\end{aligned}
\tag{6.58}
$$

をとることができ，その適当な一次結合により $h=0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{16}$ に対する 3 つの既約指標 (3.114) が得られる[7]．

6.4 自由場の相関関数

自由 boson の頂点作用素のトーラス上の相関関数

$$
\bigl\langle V_{k_1}(z_1)\cdots V_{k_N}(z_N)\bigr\rangle = \mathrm{tr}\Bigl[q^{L_0-\frac{c}{24}}V_{k_1}(z_1)\cdots V_{k_N}(z_N)\Bigr] \tag{6.59}
$$

を求めよう．ここに，$L_0=\dfrac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}a_n$，$c=1$ で，トレースは boson の Fock 空間 $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\mathbf{C}[a_{-1},a_{-2},\ldots]\,\big|\,n\bigr\rangle$ 上で計算する．トレースに意味をもたせるため，条件 $\sum_{i=1}^{N}k_i=0$ を課す．頂点作用素は $x=e^{2\pi iz}$ の座標変換により

$$
\begin{aligned}
V_k(z) &= V_k(x)\left(\frac{dx}{dz}\right)^{\frac{k^2}{2}} = V_k(x)(2\pi ix)^{\frac{k^2}{2}},\\
V_k(x) &= e^{kq}x^{ka_0}\prod_{n=1}^{\infty}\exp\Bigl(kx^n\frac{a_{-n}}{n}\Bigr)\exp\Bigl(-kx^{-n}\frac{a_n}{n}\Bigr)
\end{aligned}
\tag{6.60}
$$

と書かれる．ここで，積 $q^{L_0}V_{k_1}(x_1)\cdots V_{k_N}(x_N)$ を 3 つの部分 $A,\ B,\ C$ に分けて計算しよう．

$$
\begin{aligned}
A &= \prod_{1\le i<j\le N}(x_i-x_j)^{k_ik_j},\\
B &= q^{\frac{1}{2}a_0^2}\prod_{i=1}^{N}x_i^{k_ia_0},\\
C &= \prod_{n=1}^{\infty}q^{a_{-n}a_n}\exp\Bigl(-\sum_{i=1}^{N}k_ix_i^n\frac{a_{-n}}{n}\Bigr)\exp\Bigl(\sum_{i=1}^{N}k_ix_i^{-n}\frac{a_n}{n}\Bigr).
\end{aligned}
\tag{6.61}
$$

7) $\widetilde{L}_0$ と L_0 との差から生ずる因子 $q^{-\frac{c}{24}}$ は，指標に良い保型性をもたせるために必要である．

B のトレースは $a_0 \in \mathbf{Z}$ についての和で与えられる.

$$\mathrm{tr} B = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{\frac{n^2}{2}} \prod_{i=1}^{N} x_i^{k_i n} = \vartheta_3\left(\tau, \sum_{i=1}^{N} k_i z_i\right) \tag{6.62}$$

$(q = e^{2\pi i\tau}, x_i = e^{2\pi i z_i})$. 一方, C のトレースは公式

$$\mathrm{tr}\left[a^{x\frac{d}{dx}} e^{bx} e^{c\frac{d}{dx}}\right] = \frac{1}{1-a}\exp\left(\frac{abc}{1-a}\right) \tag{6.63}$$

により, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\, C &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}\exp\Bigl(-\sum_{i,j=1}^{N} k_i k_j \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q x_i/x_j)^n}{n(1-q^n)}\Bigr)\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}\exp\Bigl(-\sum_{i,j=1}^{N} k_i k_j \sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(q^m x_i/x_j)^n}{n}\Bigr)\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}\prod_{i,j=1}^{N}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m x_i/x_j)^{k_i k_j}.\end{aligned} \tag{6.64}$$

以上の結果を整理すると[8], 最終的に

$$\mathrm{tr}\left[q^{L_0-\frac{1}{24}}\prod_{i=1}^{N} V_{k_i}(z_i)\right] = \prod_{1\le i<j\le N}\left[\frac{\vartheta_1(z_i-z_j)}{\vartheta_1'(0)}\right]^{k_i k_j}\frac{\vartheta_3\left(\sum_{i=1}^{N} k_i z_i\right)}{\eta(\tau)} \tag{6.65}$$

が得られる.

$k_i = \pm 1$ の場合は, 自由 fermion のトーラス上の相関関数を与える. とくに, 規格化された 2 点関数は

$$G(z-w) = Z^{-1}\langle\overline{\psi}(z)\psi(w)\rangle = \frac{\vartheta_3(z-w)\vartheta_1'(0)}{\vartheta_3(0)\vartheta_1(z-w)}, \quad Z = \frac{\vartheta_3(0)}{\eta(\tau)} \tag{6.66}$$

となる. fermion 場の境界条件を変えると ϑ_3 は対応する ϑ_a になる. この結果と Wick の定理の帰結として, $2N$ 点関数について

$$\det\left[\frac{\vartheta_a(z_i-w_j)}{\vartheta_a(0)\vartheta_1(z_i-w_j)}\right]_{1\le i,j\le N} = \frac{\prod_{1\le i<j\le N}\vartheta_1(z_i-z_j)\vartheta_1(w_j-w_i)}{\prod_{1\le i,j\le N}\vartheta_1(z_i-w_j)}\cdot\frac{\vartheta_a\left(\sum_{1=1}^{N} z_i - \sum_{1=1}^{N} w_i\right)}{\vartheta_a(0)} \tag{6.67}$$

が成り立つ.

---

8) $\mathrm{tr}\, C$ の $i=j$ の積を $\sum_{i=1}^{N} k_i = 0$ を使って書き直す.

さらに，結果だけになるが，一般の閉 Riemann 面上の自由 fermion 場の相関関数も書いておこう[9)].

Σ を種数 g の閉 Riemann 面，α_i, β_i $(1 \le i \le g)$ をホモロジー $H_1(\Sigma, \mathbf{Z})$ の基底で $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j) = 0$, $(\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij}$ を満たすものとする．

Σ の正則 1 形式 (第 1 種 Abel 微分) の基底 $\omega_i = \omega_i(z)dz$ $(1 \le i \le g)$ を次のようにとる．

$$\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}, \quad \int_{\beta_i} \omega_j = \Omega_{ij} \tag{6.68}$$

この $\Omega = (\Omega_{ij})$ を Σ の**周期行列**という．$\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^g$ に対して Riemann のテータ関数を

$$\begin{aligned}\Theta[s](\boldsymbol{z}|\Omega) &= \Theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}(\boldsymbol{z}|\Omega)\\ &= \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^g} e^{\pi i(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{a})\cdot\Omega(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{a})+2\pi i(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{b})}\end{aligned} \tag{6.69}$$

で定義する．$s = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ $(2\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{b} \in \mathbf{Z}^g)$ は**スピン構造**とよばれ，fermion の境界条件を指定する．スピン構造は，$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の偶奇に応じて 2 種類に分かれる．奇のスピン構造 s_1 を任意に選んで

$$\theta(P-Q) = \Theta[s_1]\left(\int_Q^P \omega_i \,\middle|\, \Omega\right) \qquad (P, Q \in \Sigma) \tag{6.70}$$

とおき

$$E(P,Q) = \frac{\theta(Q-P)}{h(P)h(Q)}, \qquad h(P)^2 = \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\theta}{\partial y_i}(0)\omega_i(P) \tag{6.71}$$

によってプリム形式 $E(P,Q)$ を定義する (これは s_1 の選択によらない)．$E(P,Q) = -E(Q,P)$ は $\Sigma \times \Sigma$ 上の $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 形式で $P = Q$ のみを 1 位の零点とし，次のような多価性をもつ．

$$E(P+\alpha_j, Q) = E(P,Q), \quad E(P+\beta_j, Q) = e^{\pi i \Omega_{jj} + 2\pi i \int_Q^P \omega_j} E(P,Q). \tag{6.72}$$

また，プリム形式の微分

$$\omega(P,Q) = \omega(z,w)dzdw = d_z d_w \log E(z,w) \tag{6.73}$$

---

9) ソリトン理論と Riemann 面上の自由 fermion 理論の関係は, N. Ishibashi, Y. Matsuo and H. Ooguri, "Soliton equations and free fermions on Riemann surfaces", Mod. Phys. Lett. **A2** (1987) 119–131, および, N. Kawamoto, Y. Namikawa, A. Tsuchiya and Y. Yamada, "Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces", Comm. Math. Phys. **B116** (1988) 247–308 において明らかにされた.

は，第 2 種 Abel 微分の母関数となる．

以上の準備のもとで，相関関数は次のように記述される．必要なデータとして，Riemann 面 Σ とスピン構造 $s=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$，$\Sigma$ 上の点 P とそのまわりの局所座標 z, $z(P)=\infty$ を固定する．このとき，Σ 上の自由 fermion 系 (境界条件は s により指定する) のカレント $J(z)=\sum_n a_n z^{-n-1}$ の相関関数は，母関数

$$\tau(t)=\left\langle \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n\right)\right\rangle = e^{\frac{1}{2}q(t)}\Theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}(I(t)\mid\Omega) \qquad (6.74)$$

により与えられる．ここに

$$I_i(t)=\sum_{n=1}^{\infty} t_n I_n^i,\quad \omega_i(z)=\sum_{n=1}^{\infty} I_n^i z^{-n-1}$$

$$q(t)=\sum_{n,m=1}^{\infty} t_n t_m q_{nm},\quad \omega(z,w)=\frac{1}{(z-w)^2}+\sum_{n,m=1}^{\infty} q_{nm} z^{-n-1} w^{-m-1} \qquad (6.75)$$

とした．因子 $q^{\frac{1}{2}q(t)}$ はテータ関数 Θ の保型因子の一部を相殺するので，$\tau(t)$ は Θ より簡単な保型性を示す．

上記の関数 $\tau(t)$ は **KP 方程式**とよばれる可積分な方程式系の解 (準周期解) になっている[10]．ここで KP 方程式について説明する余裕はないが，この関数 $\tau(t)$ の由来だけでも述べておこう．Σ 上のスピン構造 s で指定された境界条件に従い $P\in\Sigma$ にのみ極をもつ $\frac{1}{2}$ 形式の全体を $W=H^0(\Sigma,\mathcal{L}_s(*P))$ とする．W の元を $z=0$ で Laurent 展開したものは，形式的 Laurent 級数のなす無限次元ベクトル空間 $K=\mathbf{C}[[z,z^{-1}]]$ において，ちょうど半分次元の部分空間をなす．上記の $\tau(t)$ は，この部分空間 $W\subset K$ の定める無限 Grassmann 多様体の点に対応する KP 方程式の解を与えているのである．KP 方程式は $t=(t_1,t_2,\ldots)$ に関する方程式であり，**双線形形式**で表せば

$$\oint_{z=\infty}\frac{dz}{2\pi i}V_+(z,t)\tau(t)V_-(z,t')\tau(t')=0 \qquad (6.76)$$

と書くことができる．ここに $V_\pm(z,t)$ は t 変数の微分作用素で表示した頂点作用素で，fermion $\psi(z),\overline{\psi}(z)$ の挿入を表す．(6.74) のタウ関数について (6.76) が成り立つのは，被積分関数が P にのみ極をもつ Σ 上の 1 形式であることに

10) M. Mulase, "Cohomological structure in soliton equations and Jacobian varieties", J. Differential Geom. **19** (1984) 403–430; T. Shiota, "Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations", Invent. Math. **83** (1986) 333–382.

よる.

fermion $\psi(z)$, $\overline{\psi}(z)$, カレント $J(z)$, ストレステンソル $T(z)$ などの相関関数は頂点作用素などを作用させることにより具体的に計算される. 例えば

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{1} \rangle &= \Theta[s](0), \\
\langle J(z) \rangle &= \sum_{i=1}^{g} \omega_i(z) \frac{\partial \Theta[s]}{\partial y_i}(0), \\
\langle T(z) \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{g} \omega_i(z)\omega_j(z) \frac{\partial^2 \Theta[s]}{\partial y_i \partial y_j}(0) - \frac{1}{12} S(z)\Theta[s](0)
\end{aligned}
\tag{6.77}
$$

などが得られる. $\langle T(z) \rangle$ の式において, 右辺の第 1 項は Riemann 面のモジュライの変形を表している. 第 2 項の $S(z)$ は

$$
\omega(z,w) = \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{1}{6}S(w) + \cdots \tag{6.78}
$$

で定義され, **射影接続**ともよばれる. $S(z)$ が $T(z)$ の変換則の異常項を与える.

また, fermion の $2N$ 点相関関数 $\langle \overline{\psi}(z_1) \cdots \overline{\psi}(z_N)\psi(w_N) \cdots \psi(w_1) \rangle$ に Wick の定理を適用して, **Fay の公式**[11)]

$$
\begin{aligned}
&\det \left[\frac{\Theta[s]\,(I(z_i - w_j)\,|\,\Omega)}{\Theta[s](0\,|\,\Omega)E(z,w)} \right]_{1\le i,j\le N} \\
&= \frac{\prod_{i<j} E(z_i,z_j) \prod_{i<j} E(w_j,w_i)}{\prod_{i,j} E(z_i,w_j)} \cdot \frac{\Theta[s]\left(\sum_{j=1}^{N} I(z_j - w_j) \,\middle|\, \Omega \right)}{\Theta[s](0\,|\,\Omega)}
\end{aligned}
\tag{6.79}
$$

が導かれる. ここに $I(z-w) = (\int_w^z \omega_i) \in \mathbf{C}^g$ は Abel-Jacobi 写像を表す.

6.5 因子化と Verlinde 公式

n 個の点 $P_1, \ldots, P_n$ の指定された種数 g の Riemann 面を (種数 g, 点の個数 n の) **点つき Riemann 面**とよび $\Sigma_{g,n}$ と表す. 以下,「点つき」は省略する.

2 つの Riemann 面 Σ_{g_i,n_i+1} $(i = 1,2)$ のそれぞれの指定された点から 2 点 P, Q を選び, z, w をその局所座標 $z(P) = 0$, $w(Q) = 0$ とする. P, Q の座標近傍

11) J. D. Fay, "Theta Functions on Riemann Surafces", Lecture Notes in Mathematics, 352, Springer-Verlag (1973), Corollary 2.19.

を $zw = q$ の関係で同一視することにより，新しい Riemann 面 $\Sigma_{g_1+g_2,n_1+n_2}$ ができる．また，Riemann 面 $\Sigma_{g-1,n+2}$ の 2 点 P, Q から，同様の操作によって新しい Riemann 面 $\Sigma_{g,n}$ が構成できる．これらの操作を

$$\begin{aligned} \Sigma_{g_1,n_1+1} \cup \Sigma_{g_2,n_2+1} &\to \Sigma_{g_1+g_2,n_1+n_2}, \\ \Sigma_{g-1,n+2} &\to \Sigma_{g,n} \end{aligned} \tag{6.80}$$

と表す．こうして得られた Riemann 面から逆に $q \to 0$ の極限を考えると，2 つの座標近傍が 1 点 $P = Q$ で交わった退化 Riemann 面が得られる．

$$\begin{aligned} \Sigma_{g_1+g_2,n_1+n_2} &\to \Sigma_{g_1,n_1+1} \cup \Sigma_{g_2,n_2+1}, \\ \Sigma_{g,n} &\to \Sigma_{g-1,n+2}. \end{aligned} \tag{6.81}$$

$3g-3+n>0$ のとき，$\Sigma_{g,n}$ からはじめてこのような退化を繰り返すと，最後には，$\Sigma_{0,3}$ (3 点つき $\mathbf{P}^1$) が何個かつながった状態まで退化する．$\Sigma_{0,3}$ を頂点とし，つながり具合を線で表せば，外線が n 本で g 個のループをもち，各頂点に 3 本の線の集まるグラフ (φ^3 型 Feynman 図) が得られる．このグラフの内線の個数は

$$3g-3+n \tag{6.82}$$

であり，この数だけ対応するパラメータ q がある．これらは，$\Sigma_{g,n}$ の複素構造を指定している．直観的にいえば，$\Sigma_{0,3}$ は三つ股のパンツ (またはズボン) であって，これらの裾 ($= S^1$) を縫い合わせることにより $\Sigma_{g,n}$ をつくっている．裾 S^1 の半径と縫い合わせるときの捻りの角度が複素パラメータ q の絶対値と位相に対応する．$q \to 0$ は S^1 の半径が小さくなる (ズボンが細くなる) ことを意味するが，スケール変換により，ズボンが長くなる極限とみてもよい．

以上のような Riemann 面の縫い合わせによる構成 (6.80) とその逆である退化操作 (6.81) に対して，相関関数がどのように振る舞うべきか考えよう[12)].

適当な (拡大)Virasoro 代数 $\mathcal{A}$ の対称性をもつ共形場理論に対して，$\Sigma_{g,n}$ 上の n 点関数 $\left\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \right\rangle_g$ を考える．ここに $\mathcal{O}_i$ は i 番目の点に挿入された作用素とする．退化操作 (6.81) $\Sigma_{g_1+g_2,n_1+n_2} \to \Sigma_{g_1,n_1+1} \cup \Sigma_{g_2,n_2+1}$ を考えよう (図 6.2)．2 つの部分 Σ_{g_1,n_1}, Σ_{g_2,n_2} が互いに遠方へ離れていく過程と考えて，この退化を OPE の一般化とみなすことができる．実際，$g_1 = 0$, $n_1 = 2$ の場

12) D. Friedan and S. Shenker, "The analytic geometry of two dimensional conformal field theory", Nucl. Phys. **B281** (1987) 509–545; H. Sonoda, "Sewing conformal field theories I, II", Nucl. Phys. **B311** (1988) 401–416, (1989) 417–432.

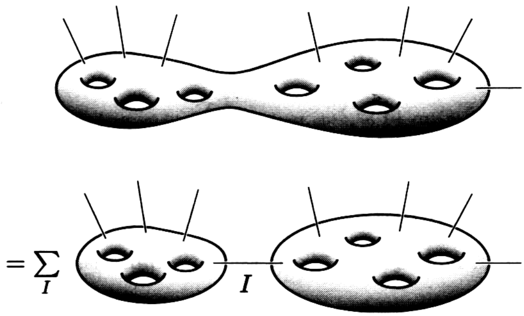


図 6.2 退化 $\Sigma_{7,6} \to \Sigma_{3,4} \cup \Sigma_{4,4}$

合 $\Sigma_{g_2,n_2+2} \to \Sigma_{0,3} \cup \Sigma_{g_2,n_2+1}$ の退化では，それぞれの成分 $\Sigma_{0,2}$, Σ_{g_2,n_2} の情報が primary 場 Φ_i，およびその descendants によって伝達されるが，これは OPE そのものである．一般の退化 $\Sigma_{g_1+g_2,n_1+n_2} \to \Sigma_{g_1,n_1+1} \cup \Sigma_{g_2,n_2+1}$ についても，OPE の局所性から相関関数の同様の挙動が期待される．象徴的に書けば，

$$\begin{aligned}&\left\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_{n_1+n_2} \right\rangle_{g_1+g_2,n_1+n_2} \\ &\quad = \sum_I q^{h_I} \left\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_{n_1} \middle| I \right\rangle_{g_1} \left\langle I \middle| \mathcal{O}_{n_1+1} \cdots \mathcal{O}_{n_1+n_2} \right\rangle_{g_2}\end{aligned} \tag{6.83}$$

である．ここで，$\{ | I \rangle \}$, $\{ \langle I | \}$ は，カイラル代数 $\mathcal{A}$ の既約表現 V_i とその双対表現 V_i^* の互いに双対な基底を表し，h_I は $| I \rangle$ の L_0 固有値である．

同様に，$\Sigma_{g,n} \to \Sigma_{g-1,n+2}$ の型の退化 (図 6.3) については

$$\left\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \right\rangle_g = \sum_I q^{h_I - \frac{c}{24}} \left\langle I \middle| \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \middle| I \right\rangle_{g-1} \tag{6.84}$$

が期待される．これは，トーラス上の相関関数のトレースによる構成の自然な一般化である．

これらの式 (6.83), (6.84) は，円筒 (ズボンの足部分) にパラメータ q により指定される拡大・回転の作用素 (の V_i での表現) $q^{L_0} = \sum_I | I \rangle q^{h_I} \langle I |$ を挿入したものと思ってもよい．

式 (6.83), (6.84) の無限和 $\sum_I$ は，十分小さい q (モジュライ空間の境界付近) において収束し，モジュライ空間上の多価有理型関数 (正確には適当な直線則の切断) を定めると期待される．ある固定した φ^3 型 Feynman 図に対して，各

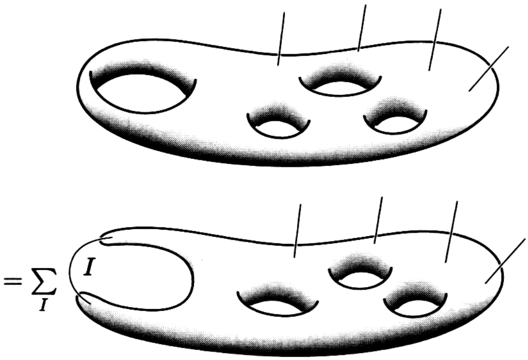


図 6.3 退化 $\Sigma_{4,4} \to \Sigma_{3,6}$

内線を伝搬する既約表現 (中間状態) と各頂点 $\Sigma_{0,3}$ に許される 3 点関数 (頂点作用素) を指定すると，そのデータから上記の方法でモジュライ空間上の関数が構成され，それらが相関関数の空間の基底をなすと考えられる．これを**因子化**という．別の φ^3 型 Feynman 図は Riemann 面の別の退化極限に対応し，それぞれの基底の変換は接続公式と解釈される．これは，$g=0$ の場合に 5.9 節で説明したことの一般化である．

相関関数の空間の次元は，因子化の仮定により $\mathbf{P}^1$ 上の 3 点関数の次元，すなわち合成則 ${N_{ij}}^k$ から計算される．${N_{ij}}^k$ は primary 場 Φ_i, Φ_j の OPE に現れる Φ_k の多重度を表す．例えば，$\mathbf{P}^1$ 上の n 点相関関数 $\left\langle \Phi_{i_1}\Phi_{i_2}\cdots\Phi_{i_n}\right\rangle$ の空間の次元 $N_{i_1 i_2\cdots i_n}$ は，行列 ${\left(N_i\right)_j}^k = {N_{ij}}^k$ を用いて

$$N_{i_1 i_2\cdots i_n} = {\left(N_{i_1}N_{i_2}\cdots N_{i_n}\right)_0}^0 \tag{6.85}$$

と与えられる．ここに $i=0$ は恒等作用素 $\Phi_0 = \mathbf{1}$ を表す．また，2 点，3 点関数については，双対表現を $V_i^* = V_{i^*}$ と表して，

$$N_{ij} = {N_{ij}}^0 = \delta_{ij^*}, \qquad N_{ijk} = {N_{ij}}^{k^*}$$

であるとする．種数 g の Riemann 面上の n 点相関関数 $\left\langle \Phi_{i_1}\Phi_{i_2}\cdots\Phi_{i_n}\right\rangle_g$ の空間の次元は，例えば，図 6.4 より

$$\begin{aligned} {(N_{i_1}N_{i_2}\cdots N_{i_n}w^g)_0}^0 &= \mathrm{tr}\left[N_{i_1}N_{i_2}\cdots N_{i_n}w^{g-1}\right], \\ w &= \sum_k (\mathrm{tr}\ N_{k^*})N_k \end{aligned} \tag{6.86}$$

で与えられる．

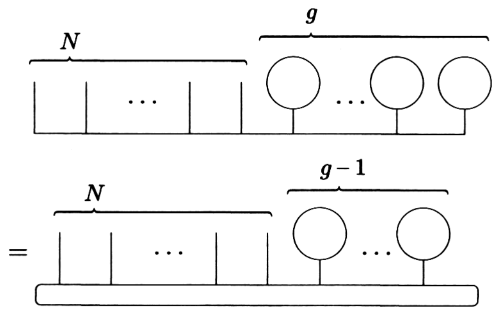


図 6.4 種数 g の n 点関数の空間の次元

$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ のカレント代数の場合に具体的に計算しよう．primary のラベルを $i=0,1,\ldots,k$ と表す．次元の計算には，合成則 N_i を同時対角化するのが便利である．N_i を同時対角化する行列 $S=\left(S_i{}^j\right)$ は

$$S_i{}^j=\sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin\frac{(i+1)(j+1)\pi}{k+2} \tag{6.87}$$

であり，必要な行列の対角成分は

$$\left(S^{-1}N_iS\right)_j{}^j=\frac{S_j{}^i}{S_0{}^i},\qquad \left(S^{-1}wS\right)_j{}^j=\frac{1}{(S_0{}^j)^2} \tag{6.88}$$

となるので，$\left\langle\Phi_{i_1}\Phi_{i_2}\cdots\Phi_{i_n}\right\rangle_g$ の空間の次元は

$$\sum_{j=0}^{k}(S_0{}^j)^{2-2g}\prod_{a=1}^{n}\frac{S_{i_a}{}^j}{S_0{}^j}=\left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\displaystyle\prod_{a=1}^{n}\sin\frac{(i_a+1)(j+1)\pi}{k+2}}{\left(\sin\dfrac{(j+1)\pi}{k+2}\right)^{2g-2+n}} \tag{6.89}$$

と計算される．$g=0$ の場合は

$$\frac{2}{k+2}\sum_{j=0}^{k}\sin^2\frac{(j+1)\pi}{k+2}\prod_{a=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{(i_a+1)(j+1)\pi}{k+2}}{\sin\dfrac{(j+1)\pi}{k+2}} \tag{6.90}$$

となり，$k\to\infty$ の極限では

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\sin^2\theta\prod_{a=1}^{n}\chi_{i_a}(\theta),\qquad \chi_i(\theta)=\frac{\sin(i+1)\theta}{\sin\theta} \tag{6.91}$$

が得られる．χ_i は $i+1$ 次元表現 L_i の指標であり，(6.91) はたしかに $L_{i_1}\otimes$

$\cdots \otimes L_{i_n}$ の分解における L_0 表現の多重度を表している．(6.90) はその離散的類似である．

ここに現れた行列 S には特別な意味がある．実際，行列 ${S_i}^j$ は $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ のレベル k の指標 $\chi_i(z,\tau)$ のモジュラー変換行列

$$\chi_i\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{j=0}^{k} {S_i}^j \chi_j(z,\tau)$$

に等しい．Verlinde (フェアリンデ) は，種々の例においてこうした一致を確かめ，一般的に合成則 $\left(N_i\right)_j{}^k = {N_{ij}}^k$ はモジュラー変換行列 $S = \left({S_i}^j\right)$ により同時対角化されると予想した (Verlinde 予想)[13]．このとき $N_i S = S D_i$, $\left(D_i\right)_j{}^k = d_j^{(i)} \delta_j^k$ とおけば ${N_{ij}}^l {S_l}^k = {S_j}^k d_k^{(i)}$ となる．さらに，$j=0$ (恒等表現) とすれば $d_k^{(i)} = \dfrac{{S_i}^k}{{S_0}^k}$ となるので，

$$\sum_l {N_{ij}}^l {S_l}^k = \frac{{S_i}^k {S_j}^k}{{S_0}^k}, \qquad {N_{ij}}^k = \sum_l \frac{{S_i}^l {S_j}^l (S^{-1})_l{}^k}{{S_0}^l} \tag{6.92}$$

が得られる．$N_{ijk} = {N_{ij}}^{k^*}$ の対称性から

$$N_{ijk} = \sum_l \frac{{S_i}^l {S_j}^l {S_k}^l}{{S_0}^l}, \qquad (S^{-1})_l{}^{k^*} = {S_k}^l \tag{6.93}$$

と表すこともできる[14]．(6.92), (6.93) を **Verlinde 公式**という．これと因子化の性質との帰結として導かれる (6.89) のような次元公式も，Verlinde 公式とよばれることもある．

以下に，Verlinde 予想の Moore-Seiberg による証明を与えておこう[15]．

トーラス上の特別な 2 点関数

$$F_j(z-w) = \left\langle \Phi_j(z) \Phi_{j^*}(w) \right\rangle_{g=1}$$

のモノドロミーを考える．Φ_j, Φ_{j^*} は互いに双対な primary 場 (したがって OPE が恒等作用素 **1** を含む) であって，$F_j(z-w)$ は

$$F_j(z-w) = (z-w)^{2h_i} \chi_j + \cdots \tag{6.94}$$

(χ_j は表現 j の指標) と規格化されているとする．トーラスの 1 サイクルの標準

13) E. Verlinde, "Fusion rules and modular transformations in conformal field theory", Nucl. Phys. **B300** (1988) 360–376.

14) S は一般に対称かつユニタリなので ${S_i}^j = {S_j}^i$, $\overline{{S_i}^j} = (S^{-1})_j{}^i = {S_{i^*}}^j$ などの関係がある．

15) G. Moore and N. Seiberg, "Polynomial equations for rational conformal theories", Phys. Lett. **212B** (1988) 451–460.

基底を α, β とし，(6.94) の j は α サイクルがつぶれたときに現れる表現のラベルとする．ここで z を 1 サイクル γ に沿って移動させた後の (6.94) の初項 (=指標) を $\phi(\gamma)\chi_j$ と表す．定義より，$\phi_i(\alpha)$ は χ_j にスカラー倍で作用する．一方，$\phi_i(\beta)$ の作用については，F_i を定数として，

$$\phi_i(\beta)\chi_j = F_i \sum_k N_{ij}{}^k \chi_k \tag{6.95}$$

が示される．S 変換の下で α, β が入れ換わることに注意すれば，(6.95) は，$S^{-1}N_iS$ が対角行列となることを意味するので Verlinde 予想が成立する．

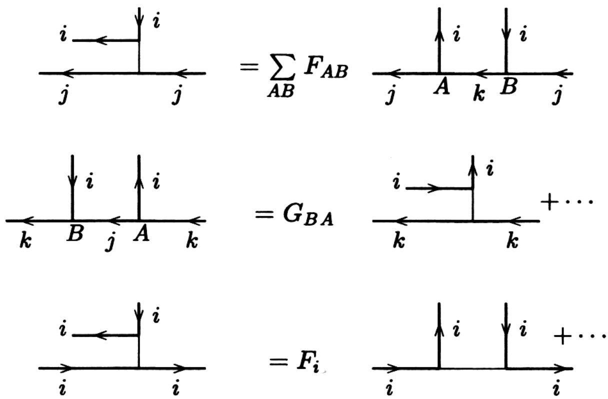


図 6.5　係数 F_{AB}, G_{AB}, F_i の定義

以上は，Verlinde 自身による予想の証明のアイデアである．残るは (6.95) であり，以下にそれを示そう．そのために，$1 \le A, B \le N_{ij}{}^k$ を一次独立な 3 点関数 $\langle \Phi_i \Phi_j \Phi_{k^*} \rangle$, $\langle \Phi_{i^*} \Phi_{j^*} \Phi_k \rangle$ のラベルとして，図 6.5 で定まる接続係数 F_{AB}, G_{BA}, F_i を用意する．これらの図で細い線には恒等表現 $\Phi_0 = \mathbf{1}$ が対応する．図 6.6 に示したペンタゴン関係式において，$C = A$ の項の係数を比較することにより，これらの係数の間に，次の関係が得られる．

$$\sum_B F_{AB} G_{BA} = F_i \tag{6.96}$$

この右辺は A によらないので，A について和をとれば

$$\sum_{AB} F_{AB} G_{BA} = F_i N_{ij}{}^k \tag{6.97}$$

が得られる．

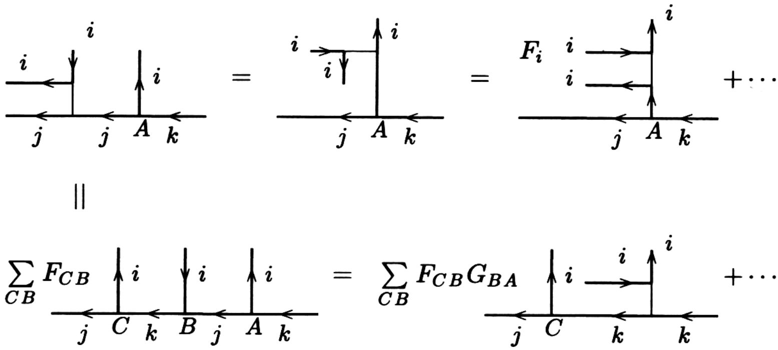


図 6.6 ペンタゴン関係式

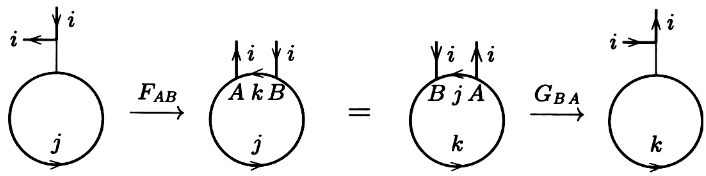


図 6.7 $\phi_i(\beta)$ の分解

一方で，$\phi_i(\beta)$ の操作は図 6.7 のように分解できる．したがって，$\phi_i(\beta)\chi_j$ における χ_k の係数は (6.97) より $\sum_{AB} F_{AB}G_{BA} = F_i N_{ij}{}^k$ で与えられ，求める結果 (6.95) を得る．よって Verlinde 公式が示された．

6.6 Riemann 面上のカレント代数

カレント代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ の対称性をもつ共形場理論 (Wess-Zumino-Witten 模型) を一般種数 g の Riemann 面上 Σ_g で考えよう．$g=0$ の場合および $U(1)$ カレント代数の場合の自然な一般化として，n 個の primary 場と m 個のカレントを挿入した相関関数

$$\Psi = \left\langle J^{a_1}(P_1)\cdots J^{a_m}(P_m)\Phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\Phi_{\lambda_n}(Q_n)\right\rangle_g \qquad (6.98)$$

について，次のような性質が期待される．

- 各 P_i について Ψ は Σ_g 上の有理型 1 形式．

- その極は $P_i = P_j\ (i \neq j)$ または $P_i = Q_j$ にのみ存在し，OPE により指定される留数をもつ．

この性質を満たす相関関数 Ψ があったとする[16)]．カレント $J^a(P)$ を primary 場に作用させることにより，各 primary 場 $\Phi_{\lambda_a}(Q_a)$ を最高重みベクトルとするカレント代数の表現 $\widehat{L}_{\lambda_a}$ が得られ，相関関数 Ψ は，それらのテンソル積から $\mathbf{C}$ への線形写像

$$\left\langle \Psi \right| : \widehat{L}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{L}_{\lambda_n} \to \mathbf{C} \tag{6.99}$$

を与える．$\left\langle \Psi \right|$ にはカレント代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ が右から作用する．いま，$Q_1, \ldots, Q_n$ にのみ極をもつ Σ_g 上の有理型関数の全体を

$$A = H^0\left(\Sigma_g, \mathcal{O}\left(* \sum_{i=1}^{n} Q_i\right)\right)$$

と表そう．任意の $f \in A$ について，

$$J^a(f) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{P=Q_i} \left(J^a(P) f(P) dP\right) \tag{6.100}$$

とおけば，留数定理より

$$\left\langle \Psi \right| J^a(f) = 0 \tag{6.101}$$

が従う．そこで，この条件 (6.101) 満たす線形汎関数 $\left\langle \Psi \right|$ を**余真空ベクトル**とよぶ．$f, g \in A$ に対して

$$[J^a(f), J^b(g)] = f^{ab}{}_c J^c(fg) + k \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{P=Q_i} \left(f(P) dg(P)\right) \tag{6.102}$$

の右辺第 2 項は消えるので，条件 (6.101) は整合的であることに注意しよう．

条件 (6.101) は，WZW 模型の共形ブロックの空間の定義方程式とみなすことができる．実際，各 $\widehat{L}_{\lambda_i}$ が可積分表現である場合に次が示されている．

- 条件 (6.101) の解は有限次元であり，それから計算されるカレントの相関関数は Σ_g 上の 1 形式としての期待される性質 (OPE 等) が成り立つ．とくに，モジュライの境界で因子化が成り立つ．
- 点つき Riemann 面 $(\Sigma_g, Q_1, \ldots, Q_n)$ に，対応する余真空ベクトルの空間を並べた層は，点つき Riemann 面のモジュライ空間上の有限次元ベクトル束となり，ストレステンソルはこのベクトル束の射影平坦接続を与える．

16) $Q_1, \ldots, Q_n$ は固定し，$P_1, \ldots, P_m$ はその個数 m も含めていろいろにとった相関関数の族を考えている．

証明については文献を参照いただきたい[17].

ごく最近まで，この理論は，(自由場理論を除いて) Riemann 面上で数学的に厳密な扱いが可能な共形場理論の唯一の例であった．この理論が特別に扱いやすい理由の一つは，因子化の性質がカレントの保存則 ($J^a(z)$ の正則性) より自然に導かれる点にある．

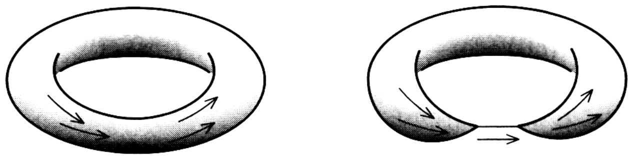


図 6.8 退化 Riemann 面上の保存カレント

図 6.8 に示したように，退化で生ずる二重点にはカレントが集中するので，各退化成分でみると二重点がカレントの吸い込み口・湧き出し口とみえる．これは，退化によって互いに共役な表現の primary 場が対生成されることの直観的説明である．

真空条件 (6.101) の解空間の有限次元性は，表現空間 $\widehat{L}_{\lambda_a}$ の可積分性が本質的に効いている．例えば，条件 (6.101) は，$U(1)$ カレント代数についても意味をもつが，この場合の解空間は $g=0$ を除いて無限次元となる．実際，タウ関数による表示では

$$\tau(t) = e^{\frac{1}{2}q(t)} f(I(t)) \tag{6.103}$$

が一般解となる．ここに $f = f(z_1, \ldots, z_g)$ は任意の正則関数である．g 個の変数の任意関数 f が不定に残る理由は，一点 Q にのみ極をもつ有理型関数の空間 $H^0(\Sigma_g, \mathcal{O}(*Q))$ には極の位数として許されない値 (**Weierstrass の溝**) が g 個あって，その分だけ方程式が足りないことによる．この g 次元の残った自由度は幾何的にいえば Σ_g 上の直線束のモジュライ (Jacobian) に対応し，そこにはカレントのゼロモード

$$\int_\alpha J, \quad \int_{\beta_i} J \qquad (i = 1, \ldots, g) \tag{6.104}$$

のなす g 次元の Heisenberg 代数が作用する．

17) A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada, "Conformal Field Theory on Universal Family of Stable Curves with Gauge Symmetries", Adv. Stud. Pure Math. **19** (1989) 459–566; 日本語の解説は，上野健爾・清水勇二 著,「モジュライ理論 3」, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店 (1999).

自由 fermion の場合は，$U(1)$ カレント $J=\varphi'$ の正則性条件 (6.101) のほかに，頂点作用素 $e^{\pm\varphi}$ について，与えられたスピン構造に対する正則 $\frac{1}{2}$ 形式としての変換性が要求される．これより任意関数 $f(z_1,\ldots,z_g)$ は，定数倍を除いてテータ関数として (6.74) のように定まる．

$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のレベル $k=1$ の場合も同様で，カレント H のみに対する真空条件からは，一般解は任意関数 $f(z_1,\ldots,z_g)$ を含むが，Frenkel-Kac 構成により

$$\langle E(P)F(Q)\rangle=\frac{1}{E(P,Q)^2}f\left(\int_Q^P\omega_1,\ldots,\int_Q^P\omega_g\right) \tag{6.105}$$

となるので，これらの一価性から

$$f(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{e}_i)=f(\boldsymbol{z}),\quad f(\boldsymbol{z}+\Omega\boldsymbol{e}_i)=e^{-4\pi i(\Omega_{ii}+\int_Q^P\omega_i)}f(\boldsymbol{z}), \tag{6.106}$$

すなわち，f はレベル 2 のテータ関数であることが従う．よって種数 g の 0 点関数 (恒等表現のみが挿入されているとみなす) の空間の次元は 2^g である．この簡単な例からも，非可換カレント代数の真空条件 (6.101) は，$U(1)$ カレント代数の場合よりも強い制限を与え，解が有限次元になることが示唆される．

ついでに $k=2$ の場合もふれておこう．primary 場は $\Phi_0=\mathbf{1}$ $(h=0)$, Φ_1 $(h=3/16)$, Φ_2 $(h=1/2)$ の 3 つである．合成則は

$$N_0=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},\quad N_1=\begin{bmatrix}&1&\\1&&1\\&1&\end{bmatrix},\quad N_2=\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix} \tag{6.107}$$

である．これより，種数 g の Riemann 面での n 点関数 $\langle\Phi_{i_1}\Phi_{i_2}\cdots\rangle_g$ の空間の次元 $N^g_{i_1i_2\ldots}$ は

$$N^g_0=2^{g-1}(2^g+1),\qquad N^g_{11}=2^{2g},\qquad N^g_1=0,\qquad N^g_2=2^{g-1}(2^g-1) \tag{6.108}$$

などと計算される．ここで N^g_0, N^g_2 は Σ_g 上の偶および奇のスピン構造の個数に一致する．このことは，$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のレベル $k=2$ 表現が 3 個の自由 fermion によって $\psi_i\psi_j$ $(ij=12,13,23)$ のように実現されることにより説明できる．

6.7 Chern-Simons ゲージ理論

本節では，Chern-Simons ゲージ理論と WZW 理論の関係について述べておこう．G をコンパクト単純群，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ とする．M を 3 次元閉多様体として A を M 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 形式 (接続形式) とする．A によって決まる積分

$$S[A] = c\int_M \mathrm{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right) \qquad (6.109)$$

を **Chern-Simons 汎関数**という．係数 c は，汎関数 $S[A]$ の**ゲージ変換**

$$A \mapsto g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$

による付加項が 2π の整数倍となるように規格化しておく．これを作用関数としたゲージ理論を **Chern-Simons ゲージ理論**とよぶ．その分配関数は，すべての接続のゲージ同値類にわたる汎関数積分

$$Z = \int [dA]e^{ikS[A]} \qquad (k \in \mathbf{Z}) \qquad (6.110)$$

として形式的に定義する．接続 A の下で，M の閉曲線 C に沿ったホロノミー $\mathrm{Hol}_C(A)$ を考える．その G 表現 R におけるトレース

$$W_R(C) = \mathrm{tr}_R \mathrm{Hol}_C[A] \qquad (6.111)$$

はゲージ不変量となる．これらをいくつか挿入した相関関数を

$$\langle W_{R_1}(C_1) \cdots W_{R_n}(C_n)\rangle = \int [dA]e^{ikS[A]}W_{R_1}(C_1) \cdots W_{R_n}(C_n) \qquad (6.112)$$

により形式的に定義する．以上の構成に多様体 M の計量は使われていないので，得られる相関関数は M とその中の (表現つきの) **絡み目** (Link) $C_1, \ldots, C_n$ から決まる位相不変量を与えると期待される．Witten は，この理論を affine Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の対称性をもつ WZW 模型と結びつけることにより，**Jones 多項式**などの**絡み目不変量**の一般化を与えた[18]．

議論の核心は，境界のある 3 次元多様体 M に対する分配関数 (それは境界 $\Sigma = \partial M$ における平坦 G 接続のモジュライ空間上のある直線束 $\mathcal{L}^{\otimes k}$ の切断になる) の全体を，Σ 上のカレント代数の共形ブロックの空間と同一視するところにある．この同一視は現在では数学的にも正当化されている．

---

18) E. Witten, "Quantum field theory and Jones polynomial", Comm. math. Phys. **121** (1989) 351–399.

この理論では，Verlinde の公式は $M = S^3$ における図 6.9 のような絡み目不変量 ${Z_{ij}}^k$ を 2 通りに計算したものが等しいことを意味する．

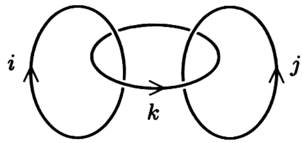


図 6.9 絡み目

すなわち，一方では，ラベル k をもつ S^1 を囲むトーラスでの **Dehn 手術** (トーラスを切り取って，その表面をモジュラー変換してから埋め直す操作) を考えて $S^2 \times S^1$ における 3 つの平行なリンクに変換することにより

$$ {Z_{ij}}^k = \sum_l {N_{ij}}^l S_l^k \qquad (6.113) $$

と計算され，もう一方では，S^2 上の 2 点関数 $\langle \Phi_k \Phi_{k^*} \rangle$ の空間が 1 次元であることから

$$ {Z_{ij}}^k S_0^k = S_i^k S_j^k \qquad (6.114) $$

となる．(6.113), (6.114) を比較して Verlinde の公式 (6.92) が得られる．

7章

特　論

共形場理論を生み出した物理的な土壌として弦理論と統計力学がある．本章では，これらの理論との関連や発展的事項について概略を述べる．本章の内容は，共形場理論における諸概念や結果について，その背景にある (非数学的な) 意味を理解する上で助けになるであろう．

7.1　coset 構成

共形場の構成法としては，これまで表現論に基づく代数的な構成を扱ってきた．その中には，自由場による構成や，ここで述べる coset 構成法などが含まれる．これとは別に，前章の Chern-Simons 理論のような，より幾何的な記述もあり，Landau-Ginzburg 模型，非線形シグマ模型など種々のものが知られている．これらは主として弦理論への応用を目指して開拓されてきたものである．以下の数節でこれらを簡単に紹介しておこう．

Virasoro 代数やその種々の拡張に対して具体的表現を構成する方法として **coset 構成法**が知られている．これは，カレント代数において，その部分代数による商を考える方法であり **GKO 構成法**ともよばれる[1]．J_n^a $(a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g})$ をカレント代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の生成子とし，その一部 J_n^a $(a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{p})$ が部分 Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{p}} \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ を生成しているとする．$\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{p}}$ に対する Virasoro 作用素を $L_n^{\mathfrak{g}}$, $L_n^{\mathfrak{p}}$ とすると，$a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{p}$ について

$$[L_m^{\mathfrak{g}}, J_n^a] = -nJ_{m+n}^a, \qquad [L_m^{\mathfrak{p}}, J_n^a] = -nJ_{m+n}^a \tag{7.1}$$

となる．これより $L_n = L_n^{\mathfrak{g}} - L_n^{\mathfrak{p}}$ とおけば L_n は $\widehat{\mathfrak{p}}$ と可換である．とくに

1) P. Goddard, A. Kent and D. Olive, "Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras", Comm. Math. Phys. **103** (1986) 105–119.

$[L_m, L_n^{\mathfrak{p}}] = 0$ となるので

$$[L_m^{\mathfrak{g}}, L_n^{\mathfrak{g}}] = [L_m^{\mathfrak{p}}, L_n^{\mathfrak{p}}] + [L_m, L_n]. \tag{7.2}$$

したがって，L_n は Virasoro 代数の関係式

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \tag{7.3}$$

を満たし，その中心は

$$c = c_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} = c_{\mathfrak{g}} - c_{\mathfrak{p}} \tag{7.4}$$

で与えられる．これにより，$\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現 V において $\widehat{\mathfrak{p}}$ の最高重みベクトルのなす部分空間に Virasoro 代数 L_n の表現が構成された．この表現の指標は表現 V の $\widehat{\mathfrak{p}}$ 表現としての分解を表す分岐関数として与えられる．

例として $\widehat{\mathfrak{g}} = (\widehat{\mathfrak{sl}_2})_k \oplus (\widehat{\mathfrak{sl}_2})_1$ (添字の $k, 1$ はレベルを表す) を対角作用 $\widehat{\mathfrak{p}} = (\widehat{\mathfrak{sl}_2})_{k+1}$ で割ると，中心が

$$c = \frac{3k}{k+2} + 1 - \frac{3(k+1)}{k+3} = 1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)} \tag{7.5}$$

の Virasoro 代数の表現を得る．これはミニマル模型で $(p,q) = (k+2, k+3)$ ととった場合 (ユニタリー系列) の実現を与える．対応する指標の関係式は

$$\chi_r^k \chi_i^1 = \sum_s \chi_{r,s}^{\mathrm{Vir}} \chi_s^{k+1} \qquad (0 \le r \le r,\ i = 0, 1) \tag{7.6}$$

である．ここで s の和は $s + i \equiv r \pmod 2$, $0 \le s \le k+1$ にわたる．

もう一つの興味深い例として $(\widehat{E}_8)_1 \oplus (\widehat{E}_8)_1 / (\widehat{E}_8)_2$ を考える．$\widehat{E}_8$ のレベル 1 の真空表現 $V(\Lambda_0)$ のテンソル積を，レベル 2 の表現 $V(2\Lambda_0)$, $V(\Lambda_1)$, $V(\Lambda_7)$ に分解する．対応する coset には $c = \frac{1}{2}$ の Virasoro 代数が作用し，指標の関係式は

$$\chi_{\Lambda_0}{}^2 = \chi_{1,1}^{\mathrm{Vir}} \chi_{2\Lambda_0} + \chi_{2,2}^{\mathrm{Vir}} \chi_{\Lambda_1} + \chi_{2,1}^{\mathrm{Vir}} \chi_{\Lambda_7} \tag{7.7}$$

となる．

一般には，coset 構成による Virasoro 代数の表現は既約であるとは限らない．次の例 $(\widehat{\mathfrak{sl}_2})_k \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_1 / \widehat{\mathfrak{u}}_1'$ は，Virasoro 代数の表現としては可約であるが，$N = 2$ 超対称代数としては既約表現を与える．$E(z), H(z), F(z)$ を $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ のレベル k のカレントとし，$S(z) = 2\overline{\psi}(z)\psi(z)$, $M(z) = H(z) + S(z)$ を $\widehat{\mathfrak{u}}_1$ および $\widehat{\mathfrak{u}}_1'$ のカレントとする[2)]．

$$G^+ = \sqrt{\frac{2}{k+2}} E\psi, \quad G^- = \sqrt{\frac{2}{k+2}} F\overline{\psi}, \quad J = \frac{M}{k+2} - \frac{S}{2} \tag{7.8}$$

2)　以下，正規積の記号は省略する．

とおく．これらは $M(z)$ と自明な OPE をもち，$\widehat{\mathfrak{u}}_1'$ カレント代数と可換である．OPE を計算すると

$$J(z)J(w) = \frac{c/3}{(z-w)^2} + \cdots, \quad J(z)G^{\pm}(w) = \frac{\pm}{z-w}G^{\pm}(w) + \cdots,$$

$$G^{+}(z)G^{-}(w) = \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{z-w}\Big[2T(w) + J'(w)\Big] + \cdots \tag{7.9}$$

が成り立つ．ここに

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2(k+2)}\left[EF + FE - H\overline{\psi}\psi + k(\overline{\psi}'\psi - \overline{\psi}\psi')\right] \\ &= \frac{1}{2(k+2)}\left[\frac{1}{2}HH + EF + FE\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{S}{2}\right)^2 - \frac{1}{k+2}\left(\frac{M}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{7.10}$$

は coset のストレステンソルであり $c = 3k/(k+2)$ の Virasoro 代数をなす．また T の下で，G^+, G^-, J は次元 $3/2, 3/2, 1$ の primary 場である．以上により，coset 構成 $(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)_k \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_1/\widehat{\mathfrak{u}}_1'$ は $c = 3k/(k+2)$ の $N=2$ の超対称 Virasoro 代数 (3.205) の表現を与えることがわかる．

$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現を可積分表現にとれば，得られる $N=2$ 代数の表現は既約ユニタリー表現となる．カレントの関係

$$y\frac{H}{2} + (y-x)\frac{S}{2} = xJ + \left(y - \frac{2x}{k+2}\right)\frac{M}{2} \tag{7.11}$$

より，$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の指標 $\chi_l^{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}$ とテータ関数 (6.21) の分岐関数 $\chi_{l,m,s}$ を次で定義する．

$$\chi_l^{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}(\tau, y)\theta_{s,2}(\tau, y-x) = \sum_{m=-k-1}^{k+2} \chi_{l,m,s}(\tau, x)\theta_{m,k+2}\left(\tau, y - \frac{2x}{k+2}\right) \tag{7.12}$$

$\theta_{s,2}$ $(s = 0,1,2,3)$ は，Jacobi テータ ϑ_i と

$$\begin{aligned} i\vartheta_1 &= \theta_{1,2} - \theta_{3,2}, \qquad \vartheta_1 = \theta_{1,2} + \theta_{3,2}, \\ \vartheta_3 &= \theta_{0,2} + \theta_{2,2}, \qquad \vartheta_4 = \theta_{0,2} - \theta_{2,2} \end{aligned} \tag{7.13}$$

により関係し，fermion $\psi, \overline{\psi}$ (あるいは超対称カレント $G^{\pm}$) の個数の偶奇 $\pm$ と境界条件 (NS, Ramond) の 4 つの選択に対応する．すなわち，$N=2$ 代数の指標は，

$$\mathrm{ch}_{l,m}^{\mathrm{NS},\pm} = \chi_{l,m,0} \pm \chi_{l,m,2}, \qquad \mathrm{ch}_{l,m}^{\mathrm{R},\pm} = \chi_{l,m,1} \pm \chi_{l,m,3} \tag{7.14}$$

で与えられる．指標 (分岐関数) を具体的に表示するには，**ストリング関数**とよばれる関数 $c^l_m(\tau)$ を次で導入すると便利である．

$$\chi^{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}_l(\tau,x)=\sum_{m=0}^{2k-1}c^l_m(\tau)\theta_{m,k}(\tau,x) \tag{7.15}$$

式 (7.12), (7.15) およびテータ関数の公式

$$\begin{aligned}&\theta_{m,k}(\tau,x)\theta_{n,l}(\tau,y)\\&=\sum_{j\in\mathbf{Z}/(k+l)\mathbf{Z}}\theta_{ml-nk+2jkl,kl(k+l)}\left(\tau,\frac{x-y}{k+l}\right)\theta_{m+n+2jk,k+l}\left(\tau,\frac{kx+ly}{k+l}\right)\end{aligned} \tag{7.16}$$

を用いて計算すると

$$\chi_{l,m,s}(\tau,x)=\sum_{r=0}^{k-1}c^l_{m+4r-s}(\tau)\theta_{2m+(k+2)(4r-s),2k(k+2)}\left(\tau,\frac{x}{k+2}\right) \tag{7.17}$$

が得られる[3]．coset 構成の利点は，指標のモジュラー変換性がみやすい点にある．実際，$\chi_{l,m,s}$ のモジュラー変換は，$\chi^{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}_l$, $\theta_{s,2}$ および $\theta_{m,k+2}$ のモジュラー変換より導かれる．このことから，$\chi_{l,m,s}$ のモジュラー不変量が $\chi^{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}_l$ の ADE 不変量を使って構成される．これを，$N=2$ ミニマル模型の **ADE 不変量**という．

上記の例で示したような coset による $N=2$ 代数 (の拡張) の構成は，一般に**風間–鈴木模型**とよばれ，超弦理論の関連から広く研究されている[4]．風間–鈴木の主要な結果は，以下のようにまとめられる．半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ による coset

$$\widehat{\mathfrak{g}}\oplus\widehat{\mathfrak{so}}(2d)/\widehat{\mathfrak{h}},\qquad 2d=\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{h} \tag{7.18}$$

が $N=2$ 超対称性をもつためには，次にあげる (1)–(3) が必要かつ十分である．すなわち Killing 形式による $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ の直交補空間を $\mathfrak{t}$ とするとき，

(1) $\mathfrak{t}$ の基底が $\{t_\alpha\}$, $\{t_{\bar\alpha}\}$ と半々に分けられ，

(2) それぞれが Lie 部分代数 $[t_\alpha,t_\beta]=f_{\alpha\beta}{}^\gamma t_\gamma$ ($t_{\bar\alpha}$ も同様) をなし，

(3) $\mathfrak{t}$ 上の Killing 形式が $(t_\alpha,t_\beta)=(t_{\bar\alpha},t_{\bar\beta})=0$, $(t_\alpha,t_{\bar\beta})=\delta_{\alpha\beta}$ とできる．

---

3) 例えば, F. Ravanini and S.-K. Yang, "Modular invariance in $N=2$ superconformal field theories", Phys. Lett. **B195** (1987) 202–208.

4) Y. Kazama and H. Suzuki, "Characterization of $N=2$ superconformal models generated by the coset space method", Phys.Lett. **B216** (1989) 112–116.

この基底 t_α, $t_{\bar\alpha}$ に対応する $\hat{\mathfrak{g}}$ のカレントを $E_\alpha(z)$, $E_{\bar\alpha}(z)$, また $\widehat{\mathfrak{so}}(2d)$ の fermion を

$$\begin{aligned}\psi^\alpha(z) &= \psi_{\bar\alpha}(z), \qquad \psi^{\bar\alpha}(z) = \psi_\alpha(z),\\ \psi^\alpha(z)\psi_\beta(w) &= \frac{\delta^\alpha_\beta}{z-w} + \cdots\end{aligned} \tag{7.19}$$

とすると，超対称カレントは次のように構成される．

$$\begin{aligned}G^+ &= \sqrt{\frac{2}{k+h^\vee}}\left[\psi^\alpha E_\alpha - \frac{1}{2}f_{\alpha\beta}{}^\gamma\psi^\alpha\psi^\beta\psi_\gamma\right],\\ G^- &= \sqrt{\frac{2}{k+h^\vee}}\left[\psi^{\bar\alpha} E_{\bar\alpha} - \frac{1}{2}f_{\bar\alpha\bar\beta}{}^{\bar\gamma}\psi^{\bar\alpha}\psi^{\bar\beta}\psi_{\bar\gamma}\right].\end{aligned} \tag{7.20}$$

$N=2$ ミニマル模型の例は $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{u}_1$, $d=1$ の場合にあたる．

7.2 特異点理論

$N=2$ 代数と特異点理論の関係を述べる．$N=2$ 代数 (3.205) のカレント $T(z), J(z), G^+(z), G^-(z)$ から，ストレステンソルの定義を少し変形して

$$T^t(z) = T(z) + \frac{1}{2}J'(z) \tag{7.21}$$

とする．この変形の操作を**位相的 twist** とよぶ[5]．twist された OPE を $N=2$ 代数の場合と比べて変更される部分のみ書けば

$$\begin{aligned}T^t(z)T^t(w) &= \frac{2}{(z-w)^2}T^t(w) + \frac{1}{z-w}T^{t\prime}(w) + \cdots,\\ T^t(z)G^\pm(w) &= \frac{\frac{3}{2}\mp\frac{1}{2}}{(z-w)^2}G^\pm(w) + \frac{1}{z-w}G^{\pm\prime}(w) + \cdots,\\ T^t(z)J(w) &= \frac{-\frac{c}{3}}{(z-w)^3} + \frac{1}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{z-w}J'(w) + \cdots,\\ G^+(z)G^-(w) &= \frac{\frac{c}{3}}{(z-w)^3} + \frac{1}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{z-w}T^t(w) + \cdots\end{aligned} \tag{7.22}$$

となる．以下 $T^t(z)$ の添字 t を省く．$J(z), T(z), G^+(z), G^-(z)$ は boson 的および fermion 的場で，その次元 h と電荷 q はそれぞれ $h=1,2,1,2$, $q=0,0,1,-1$ である．この代数は，もとの $N=2$ 代数と本質的に等価である．

5) T. Eguchi and S.-K. Yang, "$N=2$ superconformal models as topological field theories", Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1693–1701.

以上のように，変形された代数 (以下，位相的 $N=2$ 代数という) の便利なところは，次元 1 の fermion 的カレント $G^+(z)$ の存在である．次元 1 なので，その積分

$$Q = \int G^+(z)\,dz \tag{7.23}$$

が不変な意味をもつが，OPE $G^+(z)G^+(w)$ が $z=w$ で正則なので，Q はベキ零 (すなわち $Q^2=0$) な作用素となる．そこで，この Q でコホモロジーを考えることができる．すなわち，表現空間で

$$Q\,\big|\,v\,\big\rangle = 0 \tag{7.24}$$

を満たすベクトルのみを考え，また，

$$\big|\,v_1\,\big\rangle = \big|\,v_2\,\big\rangle + Q\,\big|\,w\,\big\rangle \tag{7.25}$$

となる $\big|\,v_1\,\big\rangle$, $\big|\,v_2\,\big\rangle$ は同一視する．

Q コホモロジーをとった空間では，作用素も Q 不変なもの

$$[Q, \mathcal{O}(w)]_\pm = \int Q(z)\mathcal{O}(w)\,dz = 0 \tag{7.26}$$

に制限され，また

$$\mathcal{O}_1(z) = \mathcal{O}_2(z) + [Q, U(z)]_\pm \tag{7.27}$$

と書かれる $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ は同一視される．とくに

$$T(z) = [Q, G(z)]_+ \tag{7.28}$$

であるので，$T(z)$ は Q コホモロジーの意味で自明な作用素となる．$T(z)$ が座標変換 (一般には Riemann 面の変形) の作用素であったことを考えると，Q コホモロジーをとった理論では，相関関数が場の位置や Riemann 面のモジュライによらないことが期待される．そこで，この理論を位相的というわけである．

位相的理論のもっとも基本的な例は，$N=2$ 超共形代数のミニマル模型の位相的 twist で得られる理論である．これらは，coset 構成からもわかるように $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のモジュラー不変量と関係し，やはり ADE 型に分類される．実は，この $N=2$ の ADE ミニマル模型から得られる位相的理論は単純特異点の理論 (これも ADE 分類される) による簡単な記述をもつことが知られている．以下でこれを解説しよう．

単純特異点は，次の方程式 $W=0$ の原点 (x,y) に現れる特異点である．

型	W	d	$[x]$	$[y]$
A_n	$x^{n+1}+y^2$	$\frac{n-1}{n+1}$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{2}$
D_n	$x^{n-1}+xy^2$	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-2}{2(n-1)}$
E_6	x^3+y^4	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
E_7	x^3+xy^3	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
E_8	x^3+y^5	$\frac{14}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

(7.29)

一般に，重みつき同次多項式 $W(x_1,x_2,\ldots,x_N)$，すなわち

$$W(\lambda^{\omega_1}x_1,\ldots,\lambda^{\omega_N}x_N)=\lambda W(x_1,\ldots,x_N) \tag{7.30}$$

を満たす W に対して，対応する位相的理論を考えることができる．W の重みを 1 ととり，その場合の各変数 x_i の重みを $[x_i]=\omega_i$ と書いた．すぐ後にみるように，対応する位相的理論の中心の値 $c=3d$ は

$$d=\frac{c}{3}=\sum_{i=1}^{N}(1-2\omega_i) \tag{7.31}$$

で与えられる．この W に対応する位相的 $N=2$ 代数の表現は次のように構成される．$\beta_i(z),\gamma_i(z)$ を boson 的，$b_i(z),c_i(z)$ を fermion 的な場で，次の OPE を満たすものとする．

$$\begin{aligned}\beta_i(z)\gamma_j(w)&=\frac{\delta_{ij}}{z-w}+\cdots,\\ b_i(z)c_j(w)&=\frac{\delta_{ij}}{z-w}+\cdots.\end{aligned} \tag{7.32}$$

このとき位相的代数の自由場表示が，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}J&=\sum_{i=1}^{N}\omega_i\beta_i\gamma_i-(1-\omega_i)b_ic_i,\\ T&=\sum_{i=1}^{N}\beta_i\gamma_i'-b_ic_i',\\ Q&=\sum_{i=1}^{N}-\omega_i\gamma_ic_i'+(1-\omega_i)\gamma_i'c_i,\\ G&=\sum_{i=1}^{N}\beta_ib_i.\end{aligned} \tag{7.33}$$

OPE の確認は各 i ごとに行なえばよいので，どれも簡単である．例えば，

$$Q(z)G(w) = \frac{d}{(z-w)^3} + \frac{1}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{z-w}T(w) + \cdots \tag{7.34}$$

は

$$\begin{aligned}\gamma' c(z)\cdot\beta b(w) &= \frac{1}{(z-w)^3} + \frac{1}{(z-w)^2}cb + \frac{1}{z-w}(c'b+\gamma'\beta) + \cdots ,\\ \gamma c'(z)\cdot\beta b(w) &= \frac{1}{(z-w)^3} - \frac{1}{(z-w)^2}\gamma\beta - \frac{1}{z-w}(c'b+\gamma'\beta) + \cdots\end{aligned} \tag{7.35}$$

より従う．

ここまでは，各 i ごとの表現はただの直和であり，関数 W も何ら役割を果たしていないが，それらをまとめ上げる役目を果たすのが，次の作用素である．

$$Q_s = \int dz \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} b_i(z) = \int dz j_s(z) \tag{7.36}$$

ここで，W は $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ の多項式とみなしている．W の同次性

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i \gamma_i \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = W \tag{7.37}$$

より，OPE $j_s(z)G^-(w)$ および $j_s(z)J(w)$ は正則であり，また

$$\begin{aligned} j_s(z)T(w) &= \frac{1}{(z-w)^2} j_s(w) + \cdots ,\\ j_s(z)G^+(w) &= -\frac{1}{(z-w)^2} W(w) + \cdots \end{aligned} \tag{7.38}$$

となるので，$J, T, G^\pm$ は Q_s 不変である．さらに $Q_s^2 = 0$ であるので，Q_s コホモロジーを考えることができ，$J, T, G^\pm$ はそのコホモロジー空間に作用する．これが，重み付き同次多項式 W に付随する位相的 $N=2$ 代数である．

Q_s コホモロジー空間の構造を知るために，そこに作用する $N=2$ 代数の**楕円種数**を計算してみよう．一般に，$N=2$ 代数の表現 H の楕円種数は

$$Z(\tau, x) = \mathrm{tr}_H (-1)^F q^{L_0} y^{J_0 - \frac{d}{2}} \qquad (q = e^{2\pi i \tau},\ \ y = e^{2\pi i x}) \tag{7.39}$$

で定義されるが，いまの場合，これは各 (L_0, J_0) 固有空間ごとの Q_s 作用素の指数

$$\mathrm{index}(Q_s) = \dim \mathrm{Ker}\, Q_s - \dim \mathrm{Coker}\, Q_s \tag{7.40}$$

の母関数にほかならない．これは，Fock 基底で簡単に計算できて

$$Z(\tau, x) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\theta_1(\tau, (1-\omega_i)z)}{\theta_1(\tau, \omega_i z)} \tag{7.41}$$

となる．これは，W が ADE 単純特異点の場合，たしかに $N=2$ ミニマル模型の楕円種数であることが知られている[6)]．

位相的 $N=2$ 模型の相関関数

$$\langle \mathcal{O}_1(P_1) \cdots \mathcal{O}_n(P_n) \rangle \tag{7.42}$$

を考察しよう．ここに $P_1, \ldots, P_n$ は Riemann 面 (種数 g) の n 点であり，$\mathcal{O}_i$ は Q_s 不変な作用素である．すでにみたように，この相関関数は位相的であり，点 $P_1, \ldots, P_n$ や Riemann 面のモジュライに依存しない，つまり関数ではなくただの数である．$J(z)$ が異常項をもつカレントであるため，その電荷について次の選択規則が成り立つ[7)]．

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = d(1-g) \tag{7.43}$$

γ_i の多項式は Q_s 不変である．このような作用素の Riemann 球面上の相関関数は，以下に述べるような簡単な記述がある．

$$[Q_s, c_i] = \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} \tag{7.44}$$

であるから，W の微分で生成されるイデアルの元は Q_s コホモロジーの意味で自明な作用素である．このことを考慮して，

$$\mathcal{R} = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_N]/I, \qquad I = (\partial_{x_1} W, \ldots, \partial_{x_N} W) \tag{7.45}$$

とする．$\mathcal{R}$ の元は γ_i の多項式で表される Q_s 不変な場 $\mathcal{O}$ と同一視できる．この対応で，Riemann 球面上の相関関数は，次のように表される．

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle = \int dx_1 \cdots dx_N \frac{\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n}{\partial_{x_1} W \cdots \partial_{x_N} W} \tag{7.46}$$

ϕ_i $(i = 1, \ldots, r)$ を $\mathcal{R}$ のベクトル空間としての基底とすると

$$\phi_i \phi_j = \sum_{k=0}^{r} C_{ij}{}^{k} \phi_k \quad (\mathrm{mod}\ I) \tag{7.47}$$

6) この結果は，E. Witten, "On the Landau-Ginzburg Description of $N=2$ minimal models", Internat. J. Mod. Phys. **A9** (1994) 4783–4800 において予想され，O. Aharony, P. Di Francesco and S. Yankielowicz, Nucl. Phys. **B411** (1994) 584–608; T. Kawai, Y. Yamada and S.-K. Yang, Nucl. Phys. **B414** (1994) 191–212 で証明された．

7) この系に 2 次元の重力場の効果を採り入れると，右辺に $3g-3+n$ が加わる．

により $\mathcal{R}$ には可換で結合的な積の構造が入る．$\mathcal{R}$ をカイラルリングという[8]．任意の相関関数の計算は

$$\left\langle \phi_i \phi_j \cdots \right\rangle = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}{}^{k} \left\langle \phi_k \cdots \right\rangle \tag{7.48}$$

により $C_{ij}{}^{k}$，および 1 点関数の計算に帰着される．

以上の計算は **Landau-Ginzburg 模型**とよばれる理論の経路積分により物理的に正当化されている[9]．そこでは，W はスーパーポテンシャルとよばれる Lagrange 関数の相互作用項を与える．重要なことは，この記述では，スーパーポテンシャル W を一般の正則関数にとることができ，上記の相関関数の表示 (7.46) は，そのような一般の場合にも適応可能である点である．W が重み付き同次多項式の場合は共形不変な理論に相当し，一般の場合は，共形不変な理論からの変形として解釈される．

とくに，ADE 型単純特異点にカイラルリングの元で変形した場合

$$W(x) \to W(x;s) = W(x) + \sum_{i=1}^{r} s_i \phi_i(x) \tag{7.49}$$

は，単純特異点の普遍変形を記述する．パラメータ空間 $\{(s_1, \ldots, s_r)\} = \mathbf{C}^r$ には自然な平坦座標がとれて，相関関数の計算にも重要な役割をはたす[10]．変形パラメータ $t_i = t_i(s)$ を適当にとり，W を x, t の関数とみなして

$$\phi_i(x,t) = -\frac{\partial W(x,t)}{\partial t_i} \tag{7.50}$$

とおく．t_1 は特別な座標で $\phi_1 = 1$ となるようにとる．単純特異点の場合，t_i をうまく選んで

$$\eta_{ij} = \int dx_1 \cdots dx_N \frac{\phi_i(x,t)\phi_j(x,t)}{\partial_{x_1} W \cdots \partial_{x_N} W} \tag{7.51}$$

で定義される位相的計量が t によらないようにできる (平坦座標)．このとき，

$$C_{ijk}(t) = \int dx_1 \cdots dx_N \frac{\phi_i(x,t)\phi_j(x,t)\phi_k(x,t)}{\partial_{x_1} W \cdots \partial_{x_N} W} \tag{7.52}$$

---

8) 特異点理論では **Jacobi 環**とよばれる．

9) Landau-Ginzburg 模型は，元来，超伝導の現象論的模型をさすが．ここでは (秩序変数の) ポテンシャル関数を用いた相転移現象のマクロな記述の意味．

10) K. Saito, "Period mapping associated to a primitive form", Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 1231–1264 により，一般の特異点に関して平坦座標の存在が示されているが，単純特異点 (ADE) および単純楕円型 ($E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$) 以外では具体的計算は困難である．

とおけば

$$C_{ij}{}^k(t) = \sum_{l=1}^{r} C_{ijl}(t)\eta^{lk},$$
$$\phi_i(x,t)\phi_j(x,t) = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}{}^k(t)\phi_k(x,t) \quad (\mathrm{mod}\, I) \tag{7.53}$$

は可換結合代数を定め，これを**変形カイラルリング**とよぶ．さらに，

$$C_{ijk}(t) = \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} \tag{7.54}$$

を満たす関数 $F(t)$ が存在することが示される．この $F(t)$ を**プレポテンシャル**とよぶ．変形カイラルリングの結合律から

$$\sum_{m=1}^{r} C_{ij}{}^m(t) C_{mkl}(t) = \sum_{m=1}^{r} C_{ik}{}^m(t) C_{mjl}(t) \tag{7.55}$$

が従う．これを F についての微分方程式とみなして **WDVV 方程式** (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde 方程式) とよぶ[11]．これは 2 次元位相的場の理論で基本的な関係式である．A_3 型の場合の例を示しておこう．関数 W を次のようにとる．

$$W(x,t) = \frac{1}{4}x^4 - t_3x^2 - t_2x - \left(t_1 - \frac{1}{2}t_3^2\right) \tag{7.56}$$

このとき，$\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = x^2 - t_2$ であり，$\eta_{ij} = \delta_{i+j,3}$,

$$C_{1i}{}^j = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{2i}{}^j = \begin{bmatrix} & 1 & \\ t_3 & & 1 \\ t_2 & t_3 & \end{bmatrix}, \quad C_{3i}{}^j = \begin{bmatrix} & & 1 \\ t_2 & t_3 & \\ t_3^2 & t_2 & \end{bmatrix} \tag{7.57}$$

などとなる．この場合のプレポテンシャルは

$$F = \frac{1}{2}t_3t_1^2 + \frac{1}{2}t_2^2t_1 + \frac{1}{60}t_3^5 + \frac{1}{4}t_3^2t_2^2 \tag{7.58}$$

と与えられる．位相的場の理論を位相的重力理論と結合させることにより，一般種数の Riemann 面上で興味深い理論が展開される．とくに ADE 型理論と位相重力の結合系は，分配関数が対応する ADE 型ソリトン理論のタウ関数により与えられる．この観点からは，重力理論を分離した上記の理論は対応するソリトン理論の無分散極限として理解できる[12]．

---

11) E. Witten, "Two-Dimensional Gravity And Intersection Theory On Moduli Space". Surveys Diff.Geom. 1 (1991) 243–310; R. Dijkgraaf, H. Verlinde and E. Verlinde, "Topological Strings In $D < 1$", Nucl. Phys. **B352** (1991) 59–86.

12) K. Takasaki and T. Takebe, "Integrable Hierarchies and Dispersionless Limit", Rev. Math. Phys. **7** (1995) 743–808.

最近の弦理論の進展により，特異点理論は対称性の拡大を説明する幾何学的機構としていろいろな場面に登場している．ここでさらに話題が飛躍するが，単純特異点の変形が，4 次元の**超対称ゲージ理論**で活躍する例を示しておこう[13)]．

$$y^2 = x^3 + (a_0 - z^2)x + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2) \tag{7.59}$$

は D_4 型特異点の変形を表す．これを，$z \in \mathbf{P}^1$ でパラメトライズされた楕円曲線 (x, y) の族とみなし，その大域切断を考察する．変形パラメータ a_0, b_0, b_1, b_2 を，D_4 型 Weyl 群不変式

$$u_2 = \sum_{i=1}^{4} m_i^2, \quad u_4 = \sum_{i<j} m_i^2 m_j^2, \quad u_6 = \sum_{i<j<k} m_i^2 m_j^2 m_k^2, \quad s_4 = m_1 m_2 m_3 m_4 \tag{7.60}$$

を用いて

$$a_0 = u_4 - \frac{1}{3}u_2^2, \quad b_2 = \frac{1}{3}u_2, \quad b_1 = -2s_4, \quad b_0 = u_6 - \frac{1}{3}u_2 u_4 + \frac{2}{27}u_2^3 \tag{7.61}$$

と書いておくと，切断が具体的に求められる．

- ベクトル表現 (8_v) 切断：

$$x = -t^2 + \frac{1}{3}u_2, \qquad y = tz - \frac{s_4}{t}. \tag{7.62}$$

ここに $t = \pm m_1, \pm m_2, \pm m_3$ または $\pm m_4$．

- スピノル表現 (8_s) 切断：

$$x = z + 2t^2 - \frac{u_2}{6}, \quad y = -tz + \frac{1}{t}\left(-3t^4 + \frac{1}{2}t^2 u_2 + \frac{1}{16}u_2^2 + \frac{1}{2}s_4 - \frac{1}{4}u_4\right). \tag{7.63}$$

ここに $t = \frac{1}{2}(\pm m_1 \pm m_2 \pm m_3 \pm m_4)$．ただし $-$ 符号は偶数個．

- 共役スピノル表現 (8_c) 切断：式 (7.63) において，置き換え $z \to -z$, $s_4 \to -s_4$ をしたもの．この場合も $t = \frac{1}{2}(\pm m_1 \pm m_2 \pm m_3 \pm m_4)$ であるが，ただし $-$ 符号は奇数個．

この楕円曲線の族 (7.59) は 4 種類の fermion 場の結合した $(N_f = 4)$ $N = 2$ $SU(2)$ 超対称ゲージ理論の Seiberg-Witten による解を記述するものである[14)]．パラメータ m_i は 4 種の fermion 場の質量を表し，すべての質量パラメータが

13) M. Noguchi, S. Terashima and S.-K. Yang, "$N = 2$ superconformal field theory with ADE global symmetry on a D3-brane probe", Nucl. Phys. **B556** (1999) 115–151.

14) N. Seiberg and E. Witten, "Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $N = 2$ Supersymmetric QCD", Nucl. Phys. **B431** (1994) 484–550.

$m_i = 0$ となる点 (特異点の直上) で，4 次元理論としての共形不変性が実現されている．

7.3 弦理論

弦理論については，これまで何度か無定義のまま言及してきたが，物理的にも確立した定義はない．本節と次節では，弦理論の基本的な考え方と共形場理論とのかかわりについて説明しよう．素粒子の弦理論では，基本粒子は点ではなく，1 次元的に広がった**弦**として記述される．弦は時空多様体 M (特異点があってもよい) を運動するが，その軌跡は**世界面**とよばれる 2 次元面 Σ をなす．Σ の M への埋め込み

$$X : \Sigma \to M \tag{7.64}$$

が弦の一生を記述する．通常の場の理論との対応では，線状の Feynman 図が太って面になったと思えばよい．Σ の位相を複雑にして境界やハンドルを付けることにより，自然に弦の相互作用が記述される点が弦理論の特徴である．埋め込み (7.64) としてどのようなものを許すかを X の運動方程式として与えるのが弦の古典論であり，また，埋め込みについて適当な重みで足し上げれば弦の量子論となる．具体的には適当な作用関数 $S = S(X)$ を用意して，その極値条件から決められるのが古典論の運動方程式であり，その量子論は $e^{S(X)}$ を重みとした経路積分等の方法で「定義」される．

式 (7.64) の X を 2 次元面 Σ で定義され，標的空間 M に値をとる場と思えば，弦理論は 2 次元場の理論の一種と考えられる．この場の理論が共形不変であるべし，というのが弦理論の基本原理の一つであり，これが，共形場理論が弦理論に応用される理由である．共形場理論は理論の共形変換に対する共変性によって特徴づけされるが，弦理論ではさらに強く共形不変性を要求していることに注意しよう．このため，例えば Virasoro の中心の値についての制限が生ずる．これを説明しよう．

一般に，J^a $(a = 1, \ldots, n)$ を Lie 代数 $\mathfrak{g}$

$$[J_a, J_b] = f_{ab}{}^c J_c \tag{7.65}$$

の基底とし，V をその表現空間とする．反可換な変数 c^a $(a = 1, \ldots, n)$ を用意して

$$C^p = V \otimes \wedge^p[c^1, \cdots, c^n] \qquad (p = 0, \ldots, n) \tag{7.66}$$

とおく ($C^{-1}=C^{n+1}=0$). 作用素 $Q:C^p\to C^{p+1}$ を次で定義する[15].

$$Q=c^aJ_a-\frac{1}{2}f_{ab}{}^cc^ac^bb_c \tag{7.67}$$

ここに b_a は反微分

$$b_a=\frac{\partial}{\partial c^a},\qquad \{b_a,c_b\}=\delta_a^b \tag{7.68}$$

である. このとき

$$Q^2=0 \tag{7.69}$$

が成り立つ. 実際,

$$Q_1=c^aJ_a,\qquad Q_2=-\frac{1}{2}f_{ab}{}^cc^ac^bb_c$$

とおくと

$$\begin{aligned}&\{Q_1,Q_1\}=f_{ab}{}^cc^ac^bJ_c,\\&\{Q_1,Q_2\}+\{Q_2,Q_1\}=-f_{ab}{}^cc^ac^bJ_c,\\&\{Q_2,Q_2\}=f_{ab}{}^df_{dc}{}^pc^ac^bc^cb_p=0\end{aligned} \tag{7.70}$$

となる (最後の等式は Jacobi 恒等式による). したがって

$$2Q^2=\{Q,Q\}=0 \tag{7.71}$$

を得る. これより, コホモロジー

$$H^p=(\mathrm{Ker}\ Q:C^p\to C^{p+1})/(\mathrm{Im}\ Q:C^{p-1}\to C^p) \tag{7.72}$$

が定義される. これを表現 V に対する **Lie 代数のコホモロジー**という. 物理では, 主にゲージ理論などにおいて, 状態空間 V に Lie 代数の作用が定義されていて, その変換で不変な状態に制限する場合に用いられ, これを **BRST 形式**という.

BRST 形式を Virasoro 代数の対称性に適応してみよう. これは最初に加藤–小川によってなされた[16]. $T(z)$ を中心が d のストレステンソルとする.

$$T(z)T(w)=\frac{d/2}{(z-w)^4}+\frac{2}{(z-w)^2}T(w)+\frac{1}{z-w}T'(w)+\cdots \tag{7.73}$$

15) 和に関して Einstein の記法を用いる.

16) M. Kato and K. Ogawa, "Covariant Quantization of String Based on BRS Invariance", Nucl. Phys. **B212** (1983) 443–460.

これに対して，

$$Q_B = \oint \frac{dz}{2\pi i} j_B(z), \qquad j_B = :cT + cc'b + \frac{3}{2}c'': \tag{7.74}$$

とおく．最後の項は，j_B の変換性をよくするための補正で，Q_B には寄与しない．

$$Q_B = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n L_{-n} + \frac{1}{2}\sum_{m,n\in\mathbf{Z}} (m-n) : c_m c_n b_{-m-n}: \tag{7.75}$$

であるから，Q_B は Virasoro 代数 L_n に対するコホモロジー作用素 Q である．この場合，無限和を含むので，$Q_B^2 = 0$ は自明ではない．実際 $d = 26$ の場合にだけ $Q_B^2 = 0$ となることが以下のように示される．以下，同一点の作用素の積は正規積を表すことにして，$:a(z)b(z)\cdots c(z):$ を $ab\cdots c(z)$ のように略記する．

$$\begin{aligned}
cT(z)cT(w) &= -\frac{d/2}{(z-w)^3}cc'(w) - \frac{d/4}{(z-w)^2}cc''(w), \\
&\quad -\frac{d/12}{(z-w)^2}cc'''(w) - \frac{2}{z-w}cc'T(w) + \cdots, \\
cT(z)cc'b(w) &= cc'b(z)cT(w) = \frac{1}{z-w}cc'T(w) + \cdots, \\
cc'b(z)cc'b(w) &= \frac{3}{(z-w)^3}cc'(w) + \frac{3/2}{(z-w)^2}cc''(w) \\
&\quad + \frac{1}{z-w}\left(\frac{2}{3}cc'''(w) - \frac{3}{2}c'c''(w)\right) + \cdots, \\
cc'b(z)&c''(w) + c''(z)cc'b(w) \\
&= \frac{4}{(z-w)^3}cc'(w) + \frac{2}{(z-w)^2}cc''(w) + \frac{1}{z-w}\Big(cc'''(w) + c'c''(w)\Big) + \cdots
\end{aligned} \tag{7.76}$$

などから，

$$\begin{aligned}
j_B(z)j_B(w) &= \frac{1}{(z-w)^3}\left(-\frac{d}{2}+9\right)cc'(w) + \frac{1}{(z-w)^2}\left(-\frac{d}{4}+\frac{9}{2}\right)cc''(w) \\
&\quad + \frac{1}{z-w}\left(-\frac{d}{12}+\frac{13}{6}\right)cc'''(w) + \cdots
\end{aligned} \tag{7.77}$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
\{Q_B, j_B(w)\} &= \left(-\frac{d}{12}+\frac{13}{6}\right) cc'''(w), \\
\{Q_B, Q_B\} &= \oint \frac{dw}{2\pi i}\{Q_B, j_B(w)\} = -\frac{d-26}{12}\oint \frac{dw}{2\pi i} cc'''(w)
\end{aligned}
\tag{7.78}
$$

が得られる．すなわち $Q_B^2 = 0$ となるには $d = 26$ でなければならないことが示された．幾何学的には Q_B は Riemann 面のモジュライ空間の外微分作用素とみなすことができ，$d = 26$ は弦理論に現れるモジュライ積分がモジュライ空間の体積要素としての変換性をもつための条件と解釈される．

作用素 $\mathcal{O}(z)$ が共形不変であるための条件は

$$
Q_B \mathcal{O}(z) = 0 \tag{7.79}
$$

で，これが物理的に意味のある場 $\mathcal{O}$ を決める．典型的な場合は共形次元 $h = 1$ の primary 場 $\Phi(z)$ から

$$
\mathcal{O}(z) = c(z)\Phi(z) \tag{7.80}
$$

として構成される．

例として，$d = 26$ の boson 開弦理論を考えよう．時空は 26 次元で Minkowski 計量

$$
\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, \ldots, 1)
$$

を与える．$X^\mu(z)$ $(\mu = 0, \ldots, 25)$ を弦の座標とし，その OPE は

$$
X^\mu(z) X^\nu(w) = \eta^{\mu\nu} \log(z-w) + \cdots, \tag{7.81}
$$

また，ストレステンソルは

$$
T(z) = \frac{1}{2} :\partial X_\mu(z) \partial X^\mu(z): \tag{7.82}
$$

とする．物理的な作用素 $\mathcal{O} = c\Phi$ を構成する重み $h = 1$ の primary 場 Φ としては

$$
\begin{aligned}
\Phi_T(z) &= :e^{k_\mu X^\mu(z)}: \quad (k^2 = k_\mu k^\mu = 2), \\
\Phi_V(z) &= :\zeta_\mu \partial X^\mu(z) e^{k_\mu X^\mu(z)}: \quad (k^2 = k_\mu k^\mu = 0,\ \zeta k = \zeta_\mu k^\mu = 0)
\end{aligned}
\tag{7.83}
$$

などがある．実際 OPE は

$$T(z)\Phi_T(w) = \frac{k^2/2}{(z-w)^2}\Phi_T(w) + \frac{1}{z-w}\Phi'_T(w) + \cdots,$$
$$T(z)\Phi_V(w) = \frac{\zeta k}{(z-w)^3}\Phi_T(w) + \frac{k^2/2+1}{(z-w)^2}\Phi_V(w) + \frac{1}{z-w}\Phi'_V(w) + \cdots \tag{7.84}$$

となり，それぞれスカラー場およびゲージ場を放出 (吸収) する作用素と解釈される．Φ_V で $k_\mu = \zeta_\mu$ の場合は

$$c\Phi_V = Q_B : e^{kX} :$$

と表され物理的自由度ではない．これはゲージ場の縦波成分に相当する．このように弦理論はゲージ理論も内包しており，さらに閉弦 ($= S^1$) は重力場も含む．このことが素粒子の基礎理論として期待される理由である．

7.4 ミラー対称性

前節で述べたように，弦の運動は世界面から時空への写像により表される．$(z, \overline{z})$ を世界面の座標，X^μ を時空の座標として，弦を表す写像 $X^\mu(z, \overline{z})$ を世界面上のスカラー場とみなす．このとき，作用関数 (Polyakov 作用とよぶ)

$$S = \int dz d\overline{z} G_{\mu\nu}(X) \partial_z X^\mu \partial_{\overline{z}} X^\nu \tag{7.85}$$

で記述される場の理論を考え，これを**シグマ模型**とよぶ[17]．超対称な理論では fermion 場 $\psi^\mu(z, \overline{z})$ も考えるが省略する．この理論の構造は，時空 (標的空間) の計量 $G_{\mu\nu}$ で決まる．詳細を議論している余裕はないが，この理論が $N = 2$ 超共形不変性をもつためには，時空が Ricci 平坦かつ Kähler, すなわち **Calabi-Yau 多様体**であることが条件となる．経路積分に基づくこの結果を信じるならば，$N = 2$ 超共形場理論を調べることにより，Calabi-Yau 多様体についての知見が得られると期待される．そのような結果のうちでもっともよく知られているミラー対称性について，共形場理論の観点から手短に説明しておこう．

$N = 2$ 超共形場理論をその $N = 2$ 超共形不変性を保ったまま変形することを考える．シグマ模型的記述では，Calabi-Yau 多様体の変形を扱うことになる．簡単のため，もっともよく調べられている (複素) 3 次元 Calabi-Yau 多様

17) 場が，曲がった空間に値をとる場の理論の総称．この奇妙な名称は，π 中間子の親戚である σ 粒子に由来する．σ を用いないで π のみで表した非線形シグマ模型がはじまり．

体 X の場合を考えよう．その変形には 2 種類がある．一つは計量の変形であり，もう一つは複素構造の変形である．それぞれ，対応するモジュライの次元は X の Hodge 数 $h_{1,1}(X)$ および $h_{2,1}(X)$ で与えられる．対応する $N=2$ 超共形場理論の変形は，その超共形不変性を保つため，変形を引き起こす作用素は $N=2$ 代数と可換でなければならない．そのようなものは

$$\begin{aligned} G^+_{-\frac{1}{2}}\Psi_i(z,\overline{z}) = \overline{G}^+_{-\frac{1}{2}}\Psi_i(z,\overline{z}) = 0 \qquad (i=1,\ldots,h_{1,1}), \\ G^+_{-\frac{1}{2}}\Phi_a(z,\overline{z}) = \overline{G}^-_{-\frac{1}{2}}\Phi_a(z,\overline{z}) = 0 \qquad (a=1,\ldots,h_{2,1}) \end{aligned} \tag{7.86}$$

をみたす場から[18]

$$\begin{aligned} &\int dz d\overline{z} G^-_{-\frac{1}{2}}\overline{G}^-_{-\frac{1}{2}}\Psi_i(z,\overline{z}), \\ &\int dz d\overline{z} G^-_{-\frac{1}{2}}\overline{G}^+_{-\frac{1}{2}}\Phi_a(z,\overline{z}) \end{aligned} \tag{7.87}$$

のように構成される．ここに $G^{\pm}(z)$, $\overline{G}^{\pm}(\overline{z})$ は，それぞれ正則および反正則な $N=2$ 超共形代数の fermion 的生成子である．Ψ_i, Φ_a の OPE は，それぞれに積構造を定め，その結合定数は

$$\begin{aligned} C_{ijk}(t) &= \left\langle \Psi_i\Psi_j\Psi_k \exp\left[\sum_{l=1}^{h_{1,1}} t_l \int dz d\overline{z} G^-_{-\frac{1}{2}}\overline{G}^-_{-\frac{1}{2}}\Psi_l(z,\overline{z})\right] \right\rangle, \\ C_{abc}(u) &= \left\langle \Phi_a\Phi_b\Phi_c \exp\left[\sum_{d=1}^{h_{2,1}} u_d \int dz d\overline{z} G^-_{-\frac{1}{2}}\overline{G}^+_{-\frac{1}{2}}\Phi_d(z,\overline{z})\right] \right\rangle \end{aligned} \tag{7.88}$$

で与えられ，それぞれ，プレポテンシャル関数 $F(t)$, $G(u)$ の 3 回微分として表される．Calabi-Yau 多様体 X の言葉では，作用素 Ψ_i, Φ_a にはそれぞれ $\psi_i \in H^{1,1}(X)$ および $\phi_a \in H^{2,1}(X)$ が対応し，計量と複素構造の変形を表す．それぞれの場合の結合定数は

$$\begin{aligned} C_{ijk}(t) &= \int_X \psi_i \wedge \psi_j \wedge \psi_k + \sum_C \int_C \psi_i \int_C \psi_j \int_C \psi_k \frac{e^{2\pi i \int_C h}}{1-e^{2\pi i \int_C h}}, \\ C_{abc}(u) &= \int_X \Omega \wedge \frac{\partial^3 \Omega}{\partial u_a \partial u_b \partial u_c} \end{aligned} \tag{7.89}$$

と与えられる．ここに $h = \sum_i t_i \psi_i$ は X の Kähler 形式，$\Omega = \Omega(u)$ は X の大域正則 3 形式である．また，C_{ijk} の右辺第 2 項は X 内の有理曲線 C についての和でシグマ模型の**インスタントン補正**とよばれる．

---

18) 組合せとしては $G^{\pm}_{-\frac{1}{2}}$ の複号を入れ換えた場合も考えられるが，すべての複号を一斉に反転させる対称性があるので，この 2 種類を考えれば十分である．

ミラー対称性は $F(t)$ と $G(u)$ の対称性である．このような対称性が期待されるのは，両者の違いが $N=2$ 超共形代数の立場からは，単に正則部分と反正則部分を貼り合わせる際の $U(1)$ 電荷の符号の反転にすぎないことによる．ところが，シグマ模型的に解釈すると，計量の変形と複素構造の変形という異質なものの間の対称性という非自明な結論へ導く．すなわち，"ある Calabi-Yau 多様体の族に対して，それとは $h^{1,1}$, $h^{2,1}$ が逆になったような Calabi-Yau 多様体の族があって，それぞれの対応する結合定数が等しい"．これが**ミラー対称性予想**とよばれるものであり，物理的には定理とよばれるくらいまで確立されている．

ここでは，もっとも最初に見いだされた例を示す[19]．X は $\mathbf{P}^4$ の 5 次超曲面で定義される Calabi-Yau 多様体 ($h_{2,1}=101$, $h_{1,1}=1$) とする．$h_{1,1}$ 側の結合定数は 1 種類のみで

$$c(t)=5+\sum_{k=1}^{\infty}n_k k^3\frac{e^{kt}}{1-e^{kt}}=\frac{d^3}{dt^3}F(t) \tag{7.90}$$

と与えられる．ここに，n_k は X 内の次数 k の有理曲線の個数を表す．一方，対応するミラー多様体 ($h_{2,1}=1, h_{1,1}=101$，これは，同じく $\mathbf{P}^4$ の 5 次超曲面のある離散群による商として構成される) の周期から

$$\Pi(z,r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5(n+r))!\,(r!)^5}{(5r)!\,((n+r)!)^5}z^{n+r},\qquad \pi_i(z)=\frac{\partial^i}{\partial r^i}\Pi(z,0) \tag{7.91}$$

とすると[20]，t および $\dfrac{dF}{dt}$ がミラー多様体の複素構造モジュライ z により，

$$t=\frac{\pi_1}{\pi_0},\qquad \frac{dF}{dt}=\frac{5}{2}\frac{\pi_2}{\pi_0} \tag{7.92}$$

と表される．この対応から，n_k について

$$\begin{aligned} n_1&=2875,\\ n_2&=609250,\\ n_3&=317206375,\\ n_4&=242467530000,\\ n_5&=229305888887625,\\ n_6&=248249742118022000 \end{aligned} \tag{7.93}$$

19) P. Candelas, X.C. de la Ossa, P.S.Green and L. Parkes, "A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory", Nucl. Phys. **B359** (1991) 21–74.

20) $x!=\Gamma(x+1)$ の意味．

などが得られる．この例の発見を契機として，種数の高い曲線の数え上げも含めて種々の拡張が得られている[21]．

7.5 Ising 模型

2 次元の **Ising 模型**を例として，**臨界現象**と共形場理論の関係を説明しよう．Ising 模型は磁石の性質を説明するために考案された統計力学の問題で，簡単にいえば，多数の小さな磁石が相互作用している模型である．説明したい磁石の性質とは，低温では各小磁石の向きがそろって，全体として磁石の性質を示し，高温では熱的ゆらぎのためにでたらめな方向を向き磁石でなくなるというものである．磁石が熱せられて磁性を失うのは，固体が液体や気体に変化するのと同様に**相転移**の一種であり，そのような現象 (臨界現象) の記述には共形場理論が本質的な役割を果たす．

数学的には，統計力学の主要課題は次のような和を計算することである．

$$Z(\beta) = \sum_{s \in S} e^{-\beta E(s)} \tag{7.94}$$

ここに S は集合でその元 s を**状態** (または配位) といい，$E(s)$ は状態 s のエネルギーを表す関数である．β はパラメータで温度の逆数に対応する．統計力学では，この和 $Z = Z(\beta)$ を**状態和**とか**分配関数**とかよぶ．

統計力学の模型は，状態 S とエネルギー関数 E を与えることにより特定される．Ising 模型とは，これを次のようにとったものである．Γ をグラフとする．Γ は頂点の集合 $v(\Gamma) = \{x, y, z, \ldots\}$ と，いくつかの頂点の対を結ぶ辺の集合 $e(\Gamma) = \{(x, y), (y, z), \ldots\}$ を指定して決まる．各頂点 x には $\sigma(x)$ と書かれるスピン変数が対応し，$\sigma(x)$ は 1 または -1 の値をとる．状態 $\sigma \in S$ は，各頂点のスピン変数 $\sigma(x)$ の値によって指定される．一方，エネルギー関数 $E = E(\sigma)$

21) S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen, S.-T.Yau, "Mirror symmetry, mirror map and applications to Calabi-Yau hypersurfaces", Comm. Math. Phys. **167** (1995) 301–350; "Mirror symmetry, mirror map and applications to complete intersection Calabi-Yau spaces", Nucl. Phys. **B433** (1995) 501–552. M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, C.Vafa, "Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes", Comm. Math. Phys. **165** (1994) 311–427. 他に B. Greene and S.T. Yau, Ed. "Mirror Symmetry II", Studies in Advanced Mathematics Vol.1 (AMS, International Press 1996) の文献等を参照されたい．

は

$$E(\sigma) = -J \sum_{(x,y)\in e(\Gamma)} \sigma(x)\sigma(y)$$

と与える．要するに，問題は次の和の計算である．(以下 $K = \beta J$ とおく．)

$$Z_\Gamma = \sum_{\sigma:v(\Gamma)\to\{\pm 1\}} \exp\left(K \sum_{(x,y)\in e(\Gamma)} \sigma(x)\sigma(y)\right) \tag{7.95}$$

この和は，関数 $v(\Gamma) \to \{\pm 1\}$ 全体にわたる和なので一種の汎関数和であり，連続的時空間で同じことを考えれば汎関数積分となる．頂点の個数を N とすれば，Z は 2^N 個の項からなる巨大な和である．

一般の 2 次元グラフについて，高温極限および低温極限のグラフによる展開公式を考察しておこう．

低温展開：低温極限では，最低エネルギー状態 (基底状態) と，それより少しだけエネルギーの高い状態 (低エネルギー励起状態) が分配関数への主要な寄与となる．基底状態は，スピン変数がすべて 1 (または −1) にそろった状態であり，低エネルギー励起状態は，そこから有限個のスピン変数の符号を反転させて得られる．スピン変数の反転により，式 (7.95) の指数関数の中身は，反転させたスピン変数ともとのままのスピン変数を結ぶ辺の個数の $2K$ 倍だけ減少する．そこで，Γ の双対格子 Γ^* を考え，反転させたスピン変数を囲む Γ^* 上の閉曲線 P^* を考えて，その長さを $l(P^*)$ とすれば，分配関数は

$$Z_\Gamma = 2e^{Ke(\Gamma)} \sum_{P^*} e^{-2Kl(P^*)} \tag{7.96}$$

と表される．ここで，最初の因子 “2” は 2 つの基底状態に対応する．

高温展開：$\sigma(x)^2 = 1$ に注意すると

$$e^{K\sigma(x)\sigma(y)} = \mathrm{ch}\, K + \sigma(x)\sigma(y)\mathrm{sh}\, K \tag{7.97}$$

となるので[22]，分配関数を次のように書き直すことができる．

$$\begin{aligned} Z_\Gamma &= \sum_\sigma \prod_{(x,y)\in e(\Gamma)} \Big(\mathrm{ch}\, K + \sigma(x)\sigma(y)\mathrm{sh}\, K\Big) \\ &= (\mathrm{ch}\, K)^{e(\Gamma)} \sum_\sigma \prod_{(x,y)\in e(\Gamma)} \Big(1 + \sigma(x)\sigma(y)\mathrm{th}\, K\Big) \end{aligned} \tag{7.98}$$

22) 以下，sh, ch, th は双曲線関数を表す．

最後の式の和では，各頂点のスピン変数のベキが偶数になる場合のみが寄与を与えるので，一筆書きの原理より Γ 上の閉曲線 P にわたる和として表される．

$$Z_\Gamma = (\operatorname{ch} K)^{e(\Gamma)} 2^{v(\Gamma)} \sum_P (\operatorname{th} K)^{l(P)}. \tag{7.99}$$

高温展開と低温展開を比較すると，両者に同じ種類の閉曲線に関する和が現れている．(正確にいえば，高温展開では閉じていれば何でもよいが，低温展開では，領域の境界になっている閉曲線のみを数えなければならない．球面上のグラフであればこの違いはない．ここでは，その場合に限ることにする．) そこで，双対格子 Γ^* 上で分配関数

$$Z_{\Gamma^*}(K^*) = \sum_{\sigma:v(\Gamma^*)\to\{\pm 1\}} \exp\left(K^* \sum_{(x,y)\in e(\Gamma^*)} \sigma(x)\sigma(y)\right) \tag{7.100}$$

を考えると，次の関係式が得られる．

$$Z_\Gamma(K) = (\operatorname{sh}(2K))^{\frac{e(\Gamma)}{2}} 2^{v(\Gamma)-\frac{e(\Gamma)}{2}-1} Z_{\Gamma^*}(K^*), \tag{7.101}$$

ただし

$$e^{-2K^*} = \operatorname{th} K, \qquad \operatorname{sh}(2K^*)\operatorname{sh}(2K) = 1 \tag{7.102}$$

とした．式 (7.101) を **Kramers-Wanier の双対関係式**という．

以下では，Γ として 2 次元正方格子をとった場合を考察する．頂点は $x = (i,j) \in v(\Gamma) = \mathbf{Z}^2$，辺は $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ として，$(x, x+e_1), (x, x+e_2)$ $(x \in \mathbf{Z}^2)$ などと表す．もちろんこの場合に Z_Γ は無限大となるが，以下では，周期的境界条件

$$\sigma(i+M, j) = \sigma(i, j+N) = \sigma(i,j)$$

を課して，格子点を

$$X_{MN} = \{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 \mid 1 \le i \le M,\ 1 \le j \le N\} \tag{7.103}$$

と有限個にとり，対応する分配関数 Z_{MN} の極限値 $\lim \dfrac{1}{MN} \log Z_{MN}$ $(M, N \to \infty)$ を求める．この問題の厳密な解は，Onserger により次のように与えられた．

$$\log 2 + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(\operatorname{ch}^2(2K) - \operatorname{sh}(2K)(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\right)\frac{d\theta_1}{2\pi}\frac{d\theta_2}{2\pi}. \tag{7.104}$$

この有名な結果には多数の証明が知られているが，ここでは Grassmann 積分を用いた方法を紹介する[23]．

証明． まず，分配関数の高温展開 (7.99) について，次のような fermion を用いた表示を導く．

$$Z_{MN} = (2\mathrm{ch}^2 K)^{MN}\Psi_{MN}, \qquad \Psi_{MN} = \int e^S,$$

$$S = \sum_{x\in X_{MN}} \left[tC_1(x)D_1C_3(x) + tC_2(x)D_2C_4(x) + \sum_{1\le a<b\le 4} C_a(x)C_b(x) \right]. \tag{7.105}$$

ここで，$C_a(x)$ $(a = 1,2,3,4;\ x = (i,j) \in X_{MN})$ は周期的境界条件

$$C_a(i+M,j) = C_a(i,j+N) = C_a(i,j)$$

に従う反可換な Grassmann 変数であり，D_i はずらしの作用素

$$D_1 f(i,j) = f(i+1,j), \qquad D_2 f(i,j) = f(i,j+1)$$

を表す．また，積分の記号は，体積要素 $\prod_{x\in X_{MN}} C_1(x)C_2(x)C_3(x)C_4(x)$ の係数を求める，という意味である．最後に，$t = \mathrm{th}\,K$ である．

(7.105) を示すために，(7.105) の Pfaffian の展開の各項が，ちょうど Ising 模型の高温展開のグラフの各項と対応していることを示す．図 7.1 を見ながら考えよう．

図 7.1 の各頂点は，各格子点 (i,j) にある 4 つの fermion $C_a(i,j)$ $(a = 1,2,3,4)$ を表す．頂点を結ぶ線分は縮約を表し，各頂点がちょうど 1 回ずつ縮約されているときに積分に寄与する．S の形から，$C_1(i,j)C_3(i+1,j)$, $C_2(i,j)C_4(i,j+1)$ の縮約には重み t がかかる．この例では，この種の縮約が 14 個あり t^{14} の寄与をする．残りは，各サイト内での縮約である．その方法は，各サイトの残った頂点数が 0 または 2 のとき，図に示したように 1 通りである．残った頂点数が 4 のときは，(12)(34), (13)(24), (14)(23) の 3 通りの縮約が可能であるが，その相対符号が +1, −1, +1 なので，実質は 1 通りである．こうして，Ising 模型の高温展開で必要なグラフの各々に対してちょうど 1 個のグラフが Pfaffian の展開の各項に必要な重み $t^{l(P)}$ とともに現れることがわかる．これらの寄与の符号は微妙な問題であるが，すべての場合に符号は +1 となることがわかり，求める高温展開のグラフの和を再現することが示される．

実は，分配関数の表示 (7.105) はほとんど答を書いているようなものであって，これより，Onserger の結果が直ちに導かれる．そのために，S を次のように書き直す．

$$S = \frac{1}{2}\sum_x \sum_{ab} C_a(x)K_{ab}C_b(x) \tag{7.106}$$

ここに K_{ab} は次のような行列である．

23) 巻末文献 [2] 第 2 章．

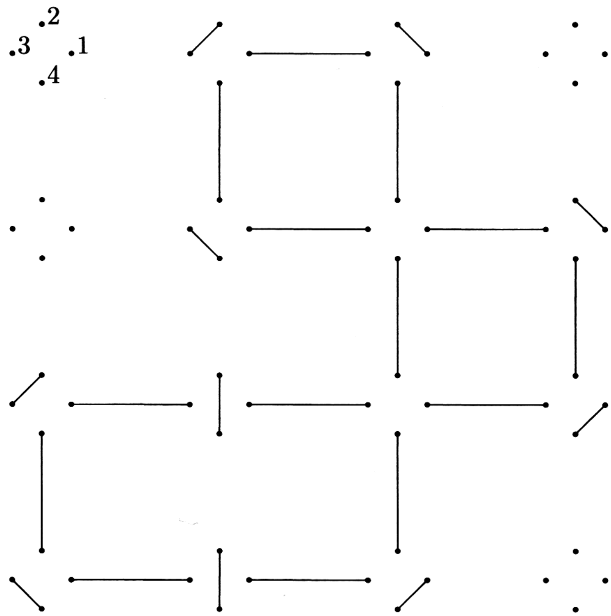


図 7.1 Ising 模型のスピン配位

$$K_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1+tD_1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1+tD_2 \\ -1-tD_1^{-1} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1-tD_2^{-1} & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.107}$$

求める Ψ_{MN} は，この行列 K の Pfaffian

$$\mathrm{Pf}(K) = (\det\, K)^{1/2}$$

である．$(i,j) \in X_{MN}$ の添字を省略しているが，行列 K は $4MN \times 4MN$ 行列であることに注意しよう．まず 4×4 の部分の行列式から

$$\det\left(K_{ab}\right)_{a,b=1}^{4} = (1+t^2)^2 - t(1-t^2)\left(D_1 + \frac{1}{D_1} + D_2 + \frac{1}{D_2}\right) \tag{7.108}$$

となる．残る $MN \times MN$ 部分の行列式は，D_1 D_2 の固有値 z, w についての積により与えられ，

$$\begin{aligned} \Psi_{MN} &= \prod_{z,w}\left[(1+t^2)^2 - t(1-t^2)\left(z + \frac{1}{z} + w + \frac{1}{w}\right)\right]^{1/2}, \\ \log\Psi_{MN} &= \frac{1}{2}\sum_{z,w}\log\left[(1+t^2)^2 - t(1-t^2)\left(z + \frac{1}{z} + w + \frac{1}{w}\right)\right] \end{aligned} \tag{7.109}$$

が得られる．固有値 z, w は $z^M = 1$, $w^N = 1$ なる 1 のベキ根であるので，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{MN}\log\Psi_{MN}\\&=\frac{1}{MN}\sum_{k_1=0}^{M-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}\frac{1}{2}\log\left[(1+t^2)^2-2t(1-t^2)\left(\cos\frac{2\pi k_1}{M}+\cos\frac{2\pi k_2}{N}\right)\right]\\&\to\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_1}{2\pi}\frac{d\theta_2}{2\pi}\log\left((1+t^2)^2-2t(1-t^2)(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\right)\end{aligned}\tag{7.110}$$

が得られる．

$$t = \operatorname{th} K, \qquad \operatorname{ch}(2K) = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \qquad \operatorname{sh}(2K) = \frac{2t}{t^2-1}$$

に注意すれば Onserger の結果を得る． □

7.6 fermion の由来

前節の扱いは，fermion の導入が天下り的で，その由来が明らかでない．ここでは，**無秩序場**の導入により，fermion が自然に現れることを説明する[24)]．

無秩序場 $\mu(x^*)$ は，双対格子点 x^* (もとの格子 Γ の面) に位置する変数で，双対性を相関関数にも拡張するとき，スピン変数 $\sigma(x)$ に双対な役割をする．$\mu(x^*)$ の役割をみるために，スピン変数 $\sigma(x)$ が，双対格子の理論でどうみえるかを考えよう．高温展開をスピン変数 $\sigma(x)\sigma(y)$ を含む相関関数の場合に適応すると，閉曲線ではなく，x と y のみを端点とする経路の全体についての和が必要になる．これを，双対格子つまり低温展開で考える．低温展開での閉曲線は，その両側でスピン変数が逆転しているようなスピンの配位を表していたので，それが閉じていない経路というのはもとの解釈では意味をなさない．しかし，分配関数への寄与という観点では，各経路は，それが通過した辺における重みを $e^{K\sigma\sigma'} \to e^{-K\sigma\sigma'}$ と変化させると思えば，これは閉曲線でなくても意味がある．

以上のことを考慮して，グラフ Γ の Ising 模型における，スピン変数 $\sigma(x)$ と 2 つの双対変数 $\mu(x^*)$ を含む相関関数を次で定義する．

$$\begin{aligned}&\langle\sigma(x_1)\cdots\sigma(x_m)\mu(x_1^*)\mu(x_2^*)\rangle\\&\qquad=\sum_{\sigma:v(\Gamma)\to\pm1}\sigma(x_1)\cdots\sigma(x_m)\prod_{(x,y)\in e(\Gamma)}e^{\pm K\sigma(x)\sigma(y)}\end{aligned}\tag{7.111}$$

24) L.P. Kadanoff and H. Ceva, “Determination of an operator algebra for the two-dimensional Ising model”, Phys. Rev. **B3** (1971) 3918–3939.

ここで，x_1^*, x_2^* は双対格子 Γ^* の点を表し，指数の符号 $\pm$ は，x_1^*, x_2^* を結ぶ双対格子上の経路 P^* を一つ選んで，各辺 $(x,y) \in e(\Gamma)$ が経路 P^* と交わるとき -1，交わらないとき $+1$ とする．

端点 x_1^*, x_2^* を決めても経路 P^* は一意ではないが，その違いはスピン変数 $\sigma(x)$ の符号にのみ影響する．例えば，相関関数 $\langle\mu(x_1^*)\mu(x_2^*)\rangle$ を x_1^*, x_2^* を結ぶ 2 つの経路 P_1^*, P_2^* について考えるとすると

$$\langle\mu(x_1^*)\mu(x_2^*)\rangle_{P_1^*} = \langle\mu(x_1^*)\mu(x_2^*)\rangle_{P_2^*} \tag{7.112}$$

がわかる．実際，閉曲線 $P_1^* + P_2^*$ 内部のスピン変数 $\sigma(x)$ を一斉に反転させれば，両者の和は互いに移り合う．同様の操作により，一般に，

$$\langle\sigma(x_1)\cdots\sigma(x_m)\mu(x_1^*)\mu(x_2^*)\rangle_{P_1^*} = \pm\langle\sigma(x_1)\cdots\sigma(x_m)\mu(x_1^*)\mu(x_2^*)\rangle_{P_2^*} \tag{7.113}$$

となる．ただし，符号は閉曲線 $P_1^* + P_2^*$ の内部にある $x_1, \ldots, x_n$ の個数の偶奇で与えられる．

μ 変数がたくさんある場合でも，その相関関数が，μ たちを端点とする経路を適当に定めて同様に定義される．μ 変数が $2m$ 個ならば経路は m 本あるが，各経路がどの二点の組を端点にするかまで込めて任意にとってよい．奇数個の場合には，特定の点 (通常は無限遠点) に，もう一つみえない μ 変数があるとみなす．以上のことを直観的にいい換えると，“各無秩序場 $\mu(x)$ には**尻尾** P があって，その尻尾を通過するたびに，スピン変数 σ の符号が逆転する” と解釈できる．つまり，μ 変数はスピン変数 σ に二価の分岐点を生み出す作用素である．μ と σ のこのような非局所性は重要で，これが，fermion のような反可換な対象を生み出す種になっている．実際

$$\psi(x, x^*) = \sigma(x)\mu(x^*) \tag{7.114}$$

によって場 $\psi(x, x^*)$ を導入すると，これが fermion 場として振る舞う．この $\psi(x, x^*)$ は二点 x, x^* に依存する．通常は x が面 x^* の頂点になっている場合を考える．一つの点 x から，辺が p 本でているときには，p 個の $\psi(x, x_1^*), \ldots, \psi(x, x_p^*)$ を考えてこれを点 x の場 $\psi(x)$ の成分のように扱う．μ と σ の非局所性のため，ψ 自身も μ から発生する尻尾を引きずっており，その影響で二価の性質をもつ．すなわち，$\psi(x)$ が $\sigma(y)$ のまわりを一回転すると -1 倍される．

正方格子の場合には，各頂点 x には 4 つの辺が集まっているので，4 成分の fermion を考えることになる．これを

$$\psi_i(x) = \sigma(x)\mu(x + a_i) \tag{7.115}$$

と表す．$x + a_i$ は，$i = 1, 2, 3, 4$ に応じてそれぞれ，頂点 x の右上，左上，左下，右下に位置する面の重心を表す．各々の尻尾はまっすぐ左にのびているとして，十分遠方で他の尻尾とつながっているとすると，次の計算が成り立つ．

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \sigma(x)\mu(x + a_1) \\ &= \sigma(x)\mu(x + a_2)e^{-2K\sigma(x)\sigma(x+e_2)} \\ &= \sigma(x)\mu(x + a_2)\Big(\mathrm{ch}(2K) - \mathrm{sh}(2K)\sigma(x)\sigma(x + e_2)\Big) \\ &= \mathrm{ch}(2K)\psi_2(x) - \mathrm{sh}(2K)\psi_3(x + e_2).\end{aligned} \tag{7.116}$$

残りの成分についても同様に計算すると，

$$c = \mathrm{ch}(2K), \qquad s = \mathrm{sh}(2K)$$

とおいて，

$$W\Psi = 0, \quad W = \begin{bmatrix} -1 & c & -sD_2 & \\ & -1 & c & -sD_1^{-1} \\ sD_2^{-1} & & -1 & c \\ -c & sD_1 & & -1 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \tag{7.117}$$

を得る．これが格子上の fermion の運動方程式である．ψ_3, ψ_4 を消去すると

$$D_2 \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c^2}{s} - D_1 & c\Big(D_1 - \dfrac{1}{s}\Big) \\ c\Big(D_1^{-1} - \dfrac{1}{s}\Big) & \dfrac{c^2}{s} - D_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \tag{7.118}$$

となり，各 fermion ψ_a は

$$\left(D_1 + \frac{1}{D_1} + D_2 + \frac{1}{D_2} - 2\frac{c^2}{s}\right)\psi_a(x) = 0 \tag{7.119}$$

を満たす．この係数は分配関数の主要因子であることに注意しよう．

補足 ここで考えている fermion ψ_a と前節の fermion C_a との関係は

$$\psi_1 = C_1 + C_4, \quad \psi_2 = C_2 - C_1, \quad \psi_3 = C_3 - C_2, \quad \psi_4 = C_4 - C_3 \tag{7.120}$$

で与えられる．実際，

$$P_1 = \begin{bmatrix} & tD_1 & & -1 \\ 1 & & tD_2 & \\ & 1 & & tD_1^{-1} \\ -tD_2^{-1} & & 1 & \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.121}$$

とすれば，行列 W と K は

$$P_1 W = -cKP_2$$

によって結ばれている．

最後に，fermion による定式化の応用として，Plücker 関係式より従うスピン相関関数の 2 次の差分関係式[25]を導いておこう．

$$\sigma_i = \sigma(x_i), \quad \mu_i = \mu(x_i^*), \quad \psi_i = \sigma_i \mu_i, \quad g = \mu_1 \mu_3 \tag{7.122}$$

とすると，Plücker 関係式から

$$\langle g \rangle \langle g\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 \rangle = \langle g\psi_1\psi_2 \rangle \langle g\psi_3\psi_4 \rangle - \langle g\psi_1\psi_3 \rangle \langle g\psi_2\psi_4 \rangle + \langle g\psi_1\psi_4 \rangle \langle g\psi_2\psi_3 \rangle \tag{7.123}$$

が成り立つ．ここで，

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, x+e_2, y, y+e_2),$$
$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (x+a_2, x+a_1, y+a_2, y+a_1) \tag{7.124}$$

の場合を考え，

$$\mu_1\mu_2 = c - s\sigma_1\sigma_2,$$
$$\mu_3\mu_4 = c - s\sigma_3\sigma_4 \tag{7.125}$$

を用いると，

25) B.M. McCoy and T.T. Wu, "Nonlinear partial difference equation for the Ising-model correlation function", Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 675–678.

$$\begin{aligned}
\langle g\rangle &= \langle \mu_1\mu_3\rangle,\\
\langle g\psi_1\psi_2\rangle &= \langle \sigma_1\sigma_2\mu_2\mu_3\rangle = \frac{c}{s}\langle \mu_2\mu_3\rangle - \frac{1}{s}\langle \mu_1\mu_3\rangle,\\
\langle g\psi_1\psi_3\rangle &= \langle \sigma_1\sigma_3\rangle,\\
\langle g\psi_1\psi_4\rangle &= \langle \sigma_1\sigma_4\mu_3\mu_4\rangle = c\langle \sigma_1\sigma_4\rangle - s\langle \sigma_1\sigma_3\rangle,\\
\langle g\psi_2\psi_3\rangle &= \langle \sigma_2\sigma_3\mu_1\mu_2\rangle = c\langle \sigma_2\sigma_3\rangle - s\langle \sigma_1\sigma_3\rangle,\\
\langle g\psi_2\psi_4\rangle &= \langle \sigma_2\sigma_4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\rangle\\
&= c^2\langle \sigma_2\sigma_4\rangle - cs\langle \sigma_1\sigma_4\rangle - cs\langle \sigma_2\sigma_3\rangle + s^2\langle \sigma_1\sigma_3\rangle,\\
\langle g\psi_3\psi_4\rangle &= \langle \sigma_3\sigma_4\mu_1\mu_4\rangle = \frac{c}{s}\langle \mu_1\mu_4\rangle - \frac{1}{s}\langle \mu_1\mu_3\rangle,\\
\langle g\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4\rangle &= \langle \mu_2\mu_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\rangle\\
&= \frac{1}{s^2}\langle \mu_1\mu_3\rangle - \frac{c}{s^2}\langle \mu_1\mu_4\rangle - \frac{c}{s^2}\langle \mu_2\mu_3\rangle + \frac{c^2}{s^2}\langle \mu_2\mu_4\rangle
\end{aligned} \tag{7.126}$$

が得られる．これらを Plücker 関係式 (7.123) に代入し，さらに，並進不変性

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(x)\sigma(y)\rangle &= G(u,v),\\
\langle \mu(x^*)\mu(y^*)\rangle &= G^*(u,v),
\end{aligned} \tag{7.127}$$

ただし，$x-y=(u,v)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}
&s^2\Big[G(u,v)^2 - G(u,v+1)G(u,v-1)\Big]\\
&\qquad + \Big[G^*(u,v)^2 - G^*(u+1,v)G^*(u-1,v)\Big] = 0
\end{aligned} \tag{7.128}$$

を得る．同様の計算から

$$\begin{aligned}
&s^2\Big[G(u,v)^2 - G(u+1,v)G(u-1,v)\Big]\\
&\qquad + \Big[G^*(u,v)^2 - G^*(u,v+1)G^*(u,v-1)\Big] = 0,
\end{aligned} \tag{7.129}$$

$$\begin{aligned}
&s^2\Big[G(u+1,v)G(u,v-1) - G(u+1,v-1)G(u,v)\Big]\\
&\qquad - \Big[G^*(u+1,v)G^*(u,v-1) - G^*(u+1,v-1)G^*(u,v)\Big] = 0
\end{aligned} \tag{7.130}$$

が得られる．これらの関係式の連続極限により，スピン・スピン相関関数が **Painlevé** 方程式の解を用いて表されるという驚嘆すべき結果[26]が示される．

7.7 繰り込み変換と c 定理

共形不変な理論は，統計力学系において特別な位置を占めている．その意味を端的に表現しているのが，以下に述べる c 定理である．

1.7 節でみたような 2 次元におけるストレステンソルの保存則

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{7.131}$$

は複素座標で

$$\partial_{\bar z} T = \partial_z \Theta, \qquad \partial_z \overline{T} = \partial_{\bar z}\Theta \tag{7.132}$$

となる．$\Theta = T_{\mu\mu}$ は，共形不変な理論では 0 であり，$T, \overline{T}$ はそれぞれ正則，反正則なカレントで，$z, \bar z$ の共形変換を生成する．対称ストレステンソルの 3 つの成分 $T(z,\bar z)$, $\overline{T}(z,\bar z)$, $\Theta(z,\bar z)$ の相関関数を

$$\begin{aligned}
\big\langle T(z,\bar z)T(0,0)\big\rangle &= \frac{F(z\bar z)}{z^4},\\
\big\langle \Theta(z,\bar z)T(0,0)\big\rangle = \big\langle T(z,\bar z)\Theta(0,0)\big\rangle &= \frac{G(z\bar z)}{z^3\bar z},\\
\big\langle \Theta(z,\bar z)\Theta(0,0)\big\rangle &= \frac{H(z\bar z)}{z^2\bar z^2}
\end{aligned} \tag{7.133}$$

とおく．$z, \bar z$ のベキは回転対称性を考慮して決めた．$T, \Theta, \overline{T}$ の (正則，反正則) 次元は，$(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ である．

保存則 $\partial_{\bar z} T = \partial_z \Theta$ を用いると

$$\big\langle \partial_{\bar z} T(z,\bar z)T(0,0)\big\rangle = \big\langle \partial_z \Theta(z,\bar z)T(0,0)\big\rangle$$

より

$$F'(z\bar z) = G'(z\bar z) - 3\frac{G(z\bar z)}{z\bar z}, \tag{7.134}$$

同様に，

$$\big\langle \partial_{\bar z} T(z,\bar z)\Theta(0,0)\big\rangle = \big\langle \partial_z \Theta(z,\bar z)\Theta(0,0)\big\rangle$$

より

26) T.T. Wu, B.M. McCoy, C.A. Tracy and E. Barouch, "Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: Exact theory in the scaling region", Phys. Rev. **B13** (1976) 316–374. 巻末文献 [2], [15] 参照.

$$G'(z\bar{z}) - \frac{G(z\bar{z})}{z\bar{z}} = H'(z\bar{z}) - 2\frac{G(z\bar{z})}{z\bar{z}}. \tag{7.135}$$

そこで

$$C = 2F + 4G - 6H \tag{7.136}$$

とおくと

$$\frac{d}{dt}C = -12H, \qquad t = \log(z\bar{z}) \tag{7.137}$$

が得られる．H は $z\bar{z}\sum_I |\langle 0 | \Theta(z/2, \bar{z}/2) | I \rangle|^2$ と書き直せることに注意すれば $H \geq 0$ であるので，t を大きくしていくとき C は t の非増大関数となる．さらに，C が極小となるのは $H = 0$，すなわち共形不変 $(\Theta = 0)$ な場合であり，C の極小値 c は Virasoro の中心を与える．

t を大きくするのは，相関関数の長距離での挙動を調べることに対応する．統計系では自由度が大きくなる極限であり，それを調べる有効な方法として**繰り込み変換**が知られている．繰り込み変換とは，簡単にいえば統計系のサイズを大きくすると同時に，局所的な自由度の平均化 (粗視化) を行なって，もとと同じ自由度の統計系に変換する操作である．スケール変換で不変な理論でない限り，この操作で自分自身にもどることはないが，少し条件を弱めて，(質量や結合定数などの) 理論のもつパラメータを調整することにより変換後の理論を変換前の理論で (近似的に) 記述することが可能な場合には，そのような理論は繰り込み可能であるという[27]．上に述べた C の非増大性は，t を大きくする代わりに，対応する繰り込み変換に対する結果と解釈することもできる．すなわち，次が示された．

繰り込み変換の非増大関数であって，変換の固定点において Virasoro 代数の中心 c を与えるような，理論のパラメータの関数 C が存在する．

この結果を Zamolodchikov の c **定理**という．直観的には C は系の局所的な自由度を勘定していて，長距離へいくほど，質量の大きな場の寄与がみえなくなり，固定点理論では (boson に換算して c 個分の) 0 質量場のみが残って共形

27) どんな理論でも，十分多くのパラメータを用意して，対称性などの制約から許されるもっとも一般的な理論を考えておけば繰り込み可能になるともいえるが，パラメータの数が無限個必要になってしまうと，理論に予言能力はなく，繰り込み可能といっても意味がない．場の理論の発散を処理する朝永-Schwinger の繰り込みの処方箋は，有限個のパラメータ (理論の input data) の定義に発散量を押し込めることであり，対して，ここで述べている繰り込みは Wilson 的繰り込みとよぶ．両者は密接に関係するが，(一般的な意味の)Wilson 的繰り込みと発散の処理とは，一応別の概念である．

不変性を実現すると解釈できる．

個々の統計理論の長距離での振舞いは，理論構成の詳細によらず，その理論が繰り込み変換で流れ込む固定点のみによって決まる．同じ固定点に流れ込む統計理論は同じ**普遍性類** (universality class) に属するという．

定義により，各普遍性類に一つずつ固定点理論 (＝共形場理論) が対応する．Virasoro 代数の中心 c は普遍性類を指定する上で，もっとも基本的なパラメータであり，統計理論の長距離での挙動に関して重要な情報を与える．その一例として有限サイズ補正についてふれておこう．

複素 z 平面から幅 ℓ の円筒領域 $\{w = u + iv \mid -\infty < u < \infty,\ 0 < v < \ell\}$ への共形変換

$$w = \frac{\ell}{2\pi} \log z \tag{7.138}$$

を考える．円筒上で u 軸および v 軸方向への並進変換を表すベクトル場は，z 平面上のベクトル場で書くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{2\pi}{\ell}\Big(z\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big), \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{2\pi i}{\ell}\Big(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big) \end{aligned} \tag{7.139}$$

となる．物理的状態空間 (つまり $T(z)$ と $\overline{T}(\bar{z})$ の表現空間) に作用してこの変換を引き起こす作用素を H, iP と書けば，ストレステンソルの変換

$$T(w) = \Big(\frac{2\pi}{\ell}\Big)^2 \Big(z^2 T(z) - \frac{c}{24}\Big)$$

を考慮して

$$H = \frac{2\pi}{\ell}\Big(L_0 + \overline{L}_0 - \frac{c}{12}\Big), \qquad P = \frac{2\pi}{\ell}\Big(L_0 - \overline{L}_0\Big) \tag{7.140}$$

となる．とくに真空状態 $L_0 = \overline{L}_0 = 0$ に対しては $H = -\frac{\pi c}{6\ell}$, $P = 0$ を得る．この結果は，有限の長さ ℓ で周期的境界条件に従う系の基底状態のエネルギーは無限サイズの場合と比べて

$$E = -\frac{\pi c}{6\ell} \tag{7.141}$$

だけの補正項をもつことを示す．これを**有限サイズ補正**とよぶ．有限サイズの統計系において，基底状態のエネルギーはサイズ ℓ に比例した部分と $1/\ell$ 依存項，高次の補正項，$\cdots$ からなる．基底状態のエネルギーは数値的にも計算しやすい量なので，その $1/\ell$ 依存性から対応する共形場理論の中心 c を読みとることができる．空間方向の代わりに時間方向について周期的にすれば，その周

期 β の逆数 T は温度と解釈でき，有限温度の自由エネルギー $F(T)$ の低温での展開 $F(T) = F(0) - \frac{\pi c}{6}T^2 + \cdots$ からも c を読みとることができる．

7.8 可積分変形とソリトン方程式

共形場理論は繰り込み変換の固定点の理論である．そこではスケール変換不変性が実現されており，理論を特徴づける長さの基準が存在しない．例えば Ising 模型は自由 fermion で記述されるが，その理論の長さの基準は fermion の質量 (mass) の逆数で与えられ，共形不変な場合は，質量が 0 の点に対応する．Ising 模型の自由 fermion に質量を与えると，共形不変性が壊れ臨界点からはずれた場の理論となる．共形場理論のこうした変形を**非臨界的変形**または **massive な変形**とよぶ．以下では，共形場理論のこうした変形が可積分な場の理論を導くような場合を考察する．こうして得られる理論は，KdV 方程式や戸田方程式などの古典ソリトン方程式の量子化ともとらえることができて，massive 可積分場の理論の重要な研究手段を与えている．

まず，KdV 方程式と sine-Gordon 方程式の古典論から，我々にとって必要な部分の概要をまとめておこう．

x, t に依存する未知関数 $u = u(x,t)$ に関する次の非線形偏微分方程式を **KdV 方程式**という．

$$u_t = u''' + 6uu', \tag{7.142}$$

ただし

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}u, \qquad u' = u_x = \frac{\partial}{\partial x}u$$

などと書いた．KdV 方程式は **KP 方程式**の特別な場合にあたる．

この方程式は Liouville の意味で完全可積分であることが知られている．すなわち，自由度の数 (いまは無限個) だけの独立で Poisson 可換な保存量が存在する．ここで**保存量**というのは

$$I = \int dx P(u, u', u'', \ldots) \tag{7.143}$$

の形の積分 (P は u, u', ... の多項式) で与えられる量で，時間 t に依存しないものをいう．最初のいくつかは次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int dx u, \\
I_3 &= \int dx u^2, \\
I_5 &= \int dx \left(u^3 - \frac{1}{2} u'^2 \right), \\
I_7 &= \int dx \left(u^4 - 2uu'^2 + \frac{1}{5} u''^2 \right).
\end{aligned}
\tag{7.144}
$$

例えば I_1, I_3 については

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_1 &= \int dx u_t = \int dx (u'' + 3u^2)' = 0, \\
\frac{d}{dt} I_3 &= \int dx 2uu_t = \int dx (4u^3 + 2uu'' - u'^2)' = 0.
\end{aligned}
\tag{7.145}
$$

ここで u については，空間積分の境界項が消えるような境界条件を仮定している．一般に u の微分多項式 P について，$P_t = Q_x$ を満たす微分多項式 Q が存在するならば，P の空間積分は保存量となる．この意味で P を保存量密度という．意味があるのは P の x 積分であるから，P 自身が x 微分で書かれているものは自明とみなす．要するに，保存量とは，次の線形写像の核である．

$$
\partial_t : F/\partial_x F \to F/\partial_x F \tag{7.146}
$$

ここに，F は u の微分多項式の空間である．

$u(x) = u(x, t)$ の Poisson 構造を，次の Poisson 括弧式

$$
\{u(x), u(y)\} = \left(\frac{1}{2} \partial_x^3 + 2u(x) \partial_x + u'(x) \right) \delta(x - y) \tag{7.147}
$$

で与える．これを用いて，KdV 方程式は次のように書ける．

$$
u_t = \{u, H\}, \qquad H = I_3, \tag{7.148}
$$

すなわち，KdV 方程式は **Hamilton** 系である．実際

$$
\begin{aligned}
\{u(x), I_3\} &= \int dy \{u(x), u(y)^2\} \\
&= \int dy \; 2u(y) \left(\frac{1}{2} \partial_x^3 + 2u(x) \partial_x + u'(x) \right) \delta(x - y) \\
&= u'''(x) + 6u(x) u'(x)
\end{aligned}
\tag{7.149}
$$

は KdV 方程式にほかならない．このポアソン構造に対して，I_n $(n = 1, 3, 5, \ldots)$

は互いに可換である．すなわち，

$$\{I_n, I_m\} = 0. \tag{7.150}$$

一般に，無限個の時間変数 $t_1, t_3, \cdots$ を用意して

$$\frac{\partial}{\partial t_n} u(x) = \{u(x), I_n\} \tag{7.151}$$

とおけば，これらは互いに可換な時間発展の族を与える．これを **KdV 階層**とよぶ．

(7.147) は次の意味で Virasoro 代数のポアソン版とみなせる．定義より

$$\left\{ \int f(x)u(x)dx, \int g(y)u(y)dy \right\}$$
$$= \int \Big(f(x)g'(x) - f'(x)g(x)\Big)u(x)dx + \frac{1}{2}\int f(x)g'''(x)dx \tag{7.152}$$

であるから，

$$l_n = \oint x^{n+1}u(x)\frac{dx}{2\pi i} \tag{7.153}$$

とおけば

$$\{l_m, l_n\} = (m-n)l_{m+n} + \frac{1}{2}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \tag{7.154}$$

となるが，これは，Virasoro 代数で

$$L_n \to \frac{c}{6}l_n, \qquad [A, B] \to \frac{6}{c}\{A, B\} \tag{7.155}$$

とおき，$c \to \infty$ の極限 (**古典極限**または Zamolodchikov 極限という) をとったものに相当する．

上記 Poisson 構造は 2 階微分作用素 $\partial_x^2 + u(x)$ に付随した Gel'fand-Dikii の Poisson 構造であり，高階の場合は W 代数の古典極限に対応する．これが W 代数を可積分系に対応させる鍵となり，対応する Drinfel'd-Sokolov 方程式系の Lie 代数的構造を用いて (超対称) W 代数の構造や表現に関する研究が進んだ[28)]．

次に sine-Gordon 方程式についてまとめておこう．$z, \bar{z}$ に依存する古典的な場 $\varphi(z, \bar{z})$ を考える．以下では z を空間変数 $\bar{z}$ を時間変数とみなし，$\bar{z}$ 依存性は省略して $\varphi(z) = \varphi(z, \bar{z})$ のように表すことにする．場 $\varphi'(z) = \partial_z \varphi(z)$ と $\varphi(z)$

28) S. Komata, K. Mohri, H. Nohara, "Classical and quantum extended superconformal algebra", Nucl. Phys. **B359** (1991) 168–200.

は，Poisson 括弧

$$\{\varphi'(z), \varphi(w)\} = \delta(z-w) \tag{7.156}$$

に従うとして，時間発展を

$$\partial_t O = \{O, H\}, \qquad H = \oint \frac{dz}{2\pi i}\Big(e^{\varphi(z)} + e^{-\varphi(z)}\Big) \tag{7.157}$$

と定義すると

$$\partial_{\bar{z}}\varphi'(z) = e^{\varphi(z)} - e^{-\varphi(z)} \tag{7.158}$$

を得る．これは **sine-Gordon 方程式**とよばれる．直接計算することにより

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}\Big(\frac{1}{2}\varphi'^2\Big) &= \partial'\Big(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\Big), \\ \partial_{\bar{z}}\Big(\frac{1}{4}\varphi'^4 + \varphi''^2\Big) &= \partial'\Big(\varphi'^2(e^{\varphi} - e^{-\varphi})\Big) \end{aligned} \tag{7.159}$$

が成り立つ．これらの式は，次の積分

$$I_1 = \int dz \frac{1}{2}\varphi'^2, \qquad I_3 = \int dz\Big(\frac{1}{4}\varphi'^4 + \varphi''^2\Big) \tag{7.160}$$

が (z に関する適当な境界条件の下で) 保存量であること，つまり

$$\frac{d}{d\bar{z}} I_n = [I_n, H] = 0 \tag{7.161}$$

を意味する．こうした保存量を系統的に構成するため，Hamiltonian を 2 つに分けて考えよう．

$$H_1 = \oint \frac{dz}{2\pi i} e^{\varphi}, \qquad H_0 = \oint \frac{dz}{2\pi i} e^{-\varphi}. \tag{7.162}$$

H_1 のみを Hamiltonian とした場合は，運動方程式は

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi(z) = e^{\varphi(z)} \tag{7.163}$$

となる．これは **Liouville 方程式**である．これについては

$$u(z) = \frac{1}{2}\varphi'(z)^2 - \varphi''(z) \tag{7.164}$$

とすると

$$\partial_{\bar{z}} u(z) = [u(z), H_1] = 0 \tag{7.165}$$

となるので，$u(z)$ の z による展開係数すべてが保存量となる．

$$\{u(z), u(w)\} = \delta'''(z-w) - 2u(z)\delta'(z-w) - u'(z)\delta(z-w) \tag{7.166}$$

より，$u(z)$ は Virasoro 代数 (の古典版) をなす．$u(z)$ と $\varphi(z)$ の関係 (**Miura**

変換) は Virasoro 代数の自由場表示の古典版とみなせる.

補足 Liouville 方程式が Virasoro 対称性をもつことは, Liouville 方程式の一般解が

$$e^{\varphi(z,\bar{z})} = 2\frac{f'(z)g'(\bar{z})}{(1-f(z)g(\bar{z}))^2} \tag{7.167}$$

のように, 任意の正則関数 $f(z)$ と反正則関数 $g(\bar{z})$ によって書かれることからもわかる. この解においては

$$u(z) = -\left(\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\frac{f''(z)^2}{f'(z)^2}\right) \tag{7.168}$$

となり, たしかに $u(z)$ は正則である. これが Schwarz 微分の形をしていることは偶然ではない.

$$\psi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{f'(z)}}, \qquad \psi_2(z) = f(z)\psi_1(z) \tag{7.169}$$

とおくと, $\psi_i(z)$ $(i=1,2)$ は線形方程式

$$\left[2\partial_z^2 - u(z)\right]\psi_i(z) = 0 \tag{7.170}$$

の解となり, 2 つの一次独立解 (7.169) には $SL(2,\mathbf{C})$ が次のように作用する.

$$\begin{aligned} &f(z) \mapsto \frac{C+Df(z)}{A+Bf(z)}, \\ &[\psi_1(z),\psi_2(z)] \mapsto [\psi_1(z),\psi_2(z)]\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7.171}$$

もちろん, Schwarz 微分の性質より, この変換で $u(x)$ は不変である.

Liouville 方程式の解は

$$\begin{aligned} &e^{-\varphi(z,\bar{z})} = \psi_1(z)\chi_1(\bar{z}) - \psi_2(z)\chi_2(\bar{z}), \\ &\chi_1(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{g'(\bar{z})}}, \qquad \chi_2(\bar{z}) = g(\bar{z})\chi_1(\bar{z}). \end{aligned} \tag{7.172}$$

と書けるので, (7.171) と同時に

$$\begin{aligned} &g(\bar{z}) \mapsto \frac{B+Ag(\bar{z})}{D+Cg(\bar{z})}, \\ &[\chi_1(\bar{z}),\chi_2(\bar{z})] \mapsto [\chi_1(\bar{z}),\chi_2(\bar{z})]\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.173}$$

と変換すれば, $\varphi(z,\bar{z})$ は不変となる. したがって, この $SL(2,\mathbf{C})$ 不変性は, $\varphi(z,\bar{z})$ を正則部分 $f(z)$ と反正則部分 $g(\bar{z})$ に分解する際の任意性に由来するものといえる. もっ

と簡単な例では，Laplace 方程式 $\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi(z,\bar{z}) = 0$ の一般解 $\varphi(z,\bar{z}) = f(z) + g(\bar{z})$ の，

$$f(z) \to f(z) + c, \qquad g(\bar{z}) \to g(\bar{z}) - c \qquad (c\text{は定数})$$

という任意性に相当する．

もとの sine-Gordon 方程式にもどろう．Hamiltonian の分解

$$H = H_1 + H_0 \tag{7.174}$$

を，Liouville の Hamiltonian H_1 に摂動項 H_0 が加わったものとみなす．摂動項の効果で

$$u(z) = \frac{1}{2}\varphi'(z)^2 - \varphi''(z) \tag{7.175}$$

は正則ではなくなり

$$\partial_{\bar{z}} u(z) = [u(z), H_0] = -2e^{-\varphi(z)}\varphi'(z) \tag{7.176}$$

となるが，右辺は z 微分の形なので

$$I_1 = \int dz u(z) \tag{7.177}$$

は保存する ($\partial_{\bar{z}} I_1 = 0$)．同様に

$$\begin{aligned} I_3 &= \int dz u^2, \\ I_5 &= \int dz \left(u^3 + u'^2\right), \\ I_7 &= \int dz \left(u^4 + 4u'^2 u + \frac{4}{5}u''^2\right) \end{aligned} \tag{7.178}$$

などの保存量が構成できる．

7.9 量子保存量

Poisson 括弧と交換子の読み換えにより，前節の議論は Virasoro 代数の自由場表示の古典版とみなせる．例えば $u(z)$ と H_1 の可換性 (7.165) は，自由場表示のストレステンソル

$$T(z) = \frac{1}{2} : \varphi'(z)^2 : + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta}\right)\varphi''(z) \tag{7.179}$$

と遮蔽作用素

$$Q_1 = \oint dz : e^{\beta\varphi(z)} : \tag{7.180}$$

の可換性のポアソン版である．そこで，さらに，もう一つの作用素

$$Q_0 = \oint dz : e^{-\beta\varphi(z)} : \tag{7.181}$$

を用意し，$T(z)$ の微分 (非可換) 多項式の積分であって Q_0 とも可換となるものを探せ，という問題が考えられる．この問題は，佐々木–山中[29]により，Virasoro 代数と量子 sine-Gordon 方程式との関連から考察され，Zamolodchikov および江口–梁により，共形場理論の可積分変形の立場から研究された[30]．共形場理論の変形は，本来は正則・反正則をあわせた物理的理論で議論されるべきであるが，ここでは，前節までの古典論との類似に基づいて，正則部分のみを考察する．具体的には，$T(z)$ の微分多項式 $P(z) = P(T(z), T'(z), \ldots)$ に対して，その (g について 1 次の) 摂動を

$$\partial_{\bar{z}} P(z) = [P(z), H] \tag{7.182}$$

で与え，$[P(z), H]$ が何かの z 微分となるものを探すのである．このとき $\int dz P(z)$ は保存量となる．ここに

$$H = g \int dz \Phi(z) \tag{7.183}$$

は摂動項で g が摂動のパラメータである．例えば，Φ を重み h の primary 場とすると

$$\partial_{\bar{z}} T(z) = [T(z), H] = g(h-1)\partial_z \Phi(z) \tag{7.184}$$

となるが，これは運動量保存則

$$\partial_{\bar{z}} T + \partial_z \Theta = 0, \qquad \Theta = g(1-h)\Phi$$

を表すと解釈する．この関係式 $\Theta = g(1-h)\Phi$ は，パラメータ g がスケール変換 $x_\mu \to (1+dt)x_\mu$ に対して

$$\frac{dg}{dt} = (1-h)g + O(g^2) \tag{7.185}$$

と繰り込まれることを表している．実際，無限小スケール変換 $x_\mu \to (1+dt)x_\mu$ は作用素 $dt \int dz\Theta$ の相関関数への挿入により表されるので，パラメータ g の変化 (繰り込み) は

29) R. Sasaki and I. Yamanaka, "Virasoro Algebra, Vertex Operators, Quantum Sine-Gordon and Solvable Quantum Field Theories", 巻末文献 [4], pp.271–296.

30) A. B. Zamolodchikov, "Integrable Field Theory from Conformal Field Theory", 巻末文献 [5], pp.641–674. T. Eguchi and S.-K. Yang, "Deformations of conformal field theories and soliton equations", Phys. Lett. **B224** (1989) 373–378.

$$\frac{dg}{dt}\frac{\partial}{\partial g}\left\langle e^H\right\rangle = \int dz\left\langle\Theta(z)e^H\right\rangle = g(1-h)\frac{\partial}{\partial g}\left\langle e^H\right\rangle \tag{7.186}$$

となる．これより，摂動項 (7.183) の長距離極限での効果は $h<1$ の場合は大きくなり，$h>1$ の場合は小さくなる．ちょうど $h=1$ の場合は **marginal** とよばれ，共形不変性が保たれる[31]．

Zamolodchikov はミニマル模型を $\Phi_{1,3}$, $\Phi_{1,2}$ 等の primary 作用素で変形した場合，保存量が無限個存在すると予想し，対応する可積分な場の理論を考察した．保存量の計算方法は以下のとおりである．$T(z)$ の微分多項式 $P(z)$ は恒等作用素 $\mathbf{1}$ の descendant 場と 1 対 1 に対応するので，$\mathbf{1}$ に $\left|0\right\rangle$ を対応させて，$P(z)$ を扱う代わりに，Virasoro 代数の真空表現 V_0 考察するのが便利である．変形作用素 $\Phi(z)$ を primary 場

$$[L_n, \Phi(z)] = z^n\Big(z\partial_z + h(n+1)\Big)\Phi(z) \tag{7.187}$$

としているので，

$$D_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \Phi(z) \tag{7.188}$$

とおけば

$$[D_m, L_n] = \Big((1-h)(n+1)+m\Big)D_{m+n} \tag{7.189}$$

となる．一方，真空への作用は

$$D_{-n-1}\left|0\right\rangle = \frac{1}{n!}L_{-1}^n\left|h\right\rangle \tag{7.190}$$

で与えられる．これらの式を用いて

$$D_0 : V_0/L_{-1}V_0 \to V_h/L_{-1}V_h \tag{7.191}$$

の核を求めれば，それが保存量密度を与える．

(1,3) 摂動の下での保存量のいくつかを以下に示す．

$$\begin{aligned}
I_1 &= \oint dz L_{-2}\mathbf{1}, \\
I_3 &= \oint dz L_{-2}^2\mathbf{1}, \\
I_5 &= \oint dz\left(L_{-2}^3 - \frac{c+2}{12}L_{-3}^2\right)\mathbf{1}, \\
I_7 &= \oint dz\left(L_{-2}^4 - \frac{c+8}{3}L_{-3}^2L_{-2} + \frac{c^2+19c+19}{45}L_{-4}^2\right)\mathbf{1}.
\end{aligned} \tag{7.192}$$

31) 同様の意味で，式 (7.87) は $N=2$ 代数に対する marginal な変形の摂動項である．

ここで，$c = 13 - 6\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $h = 2t - 1$ における特異ベクトル

$$\left(L_{-1}^3 - 2(h+1)L_{-2}L_{-1} + h(h+1)L_{-3}\right)\,|\,h\,\rangle = 0 \tag{7.193}$$

を用いた.

同様に，(1,2) 摂動の下での保存量は

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint dz L_{-2}\mathbf{1}, \\ I_5 &= \oint dz\Big(L_{-2}^3 + \frac{16 - 3h + 2h^2}{4(1+2h)}L_{-3}^2\Big)\mathbf{1}, \\ I_7 &= \oint dz\Big(L_{-2}^4 + \frac{3(6 - 5h + 2h^2)}{2(1+2h)}L_{-3}^2 L_{-2} \\ &\qquad + \frac{36 - 1127h + 686h^2 - 292h^3 + 40h^4}{30(1+2h)^2}L_{-4}^2\Big)\mathbf{1} \end{aligned} \tag{7.194}$$

などとなる，ここでも，$c = 13 - 6\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $h = \frac{3 - 2t}{4t}$ に対する特異ベクトル

$$\left(L_{-1}^2 - \frac{2(2h+1)}{3}L_{-2}\right)\,|\,h\,\rangle = 0 \tag{7.195}$$

を用いた．こうした無限個の保存量の存在は Feigin-Frenkel により自由場表示を用いたコホモロジー的方法により証明された[32)]．また，量子可積分系の観点から，これらの保存量を対角化する問題も研究されている[33)].

32) B. Feigin and E. Frenkel, "Integrals of motion and quantum groups. Integrable systems and quantum groups" (Montecatini Terme, 1993), 349–418, Lecture Notes in Math. 1620, Springer, Berlin, 1996.

33) V. Bazhanov, S. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov, "Integrable structure of conformal field theory, I, II, III", Comm. Math. Phys. **177** (1996) 381–398; **190** (1997) 247–278; **200** (1999) 297–324.

参 考 文 献

(さらに進んで学びたい人へ)

共形場理論全般に関するまとまった文献として

[1] "Conformal Field Theory", P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, Springer-Verlag (1997)

[2] "Statistical field theory, volume 1, 2", Claude Itzykson and Jean-Michel Drouffe, Cambridge Univ. Press (1989)

[3] "Scaling and Renomalization in Statistical Physics", John Cardy, Cambridge Univ. Press (1996)

などがあり，本書でも参考にした．[1] は 890 ページと大部で，演習問題もあり内容豊富．[2], [3] は統計系との関連に詳しい．

初期の基本的な論文がまとまってみられる文献は

[4] "Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models", Advanced Studies in Pure Mathematics 16, M. Jimbo, T. Miwa and A. Tsuchiya ed. Kinokuniya (1988)

[5] "Integrable Systems in Quantum Field Theory and Statistical Machanics", Advanced Studies in Pure Mathematics 19, M. Jimbo, T. Miwa and A. Tsuchiya ed. Kinokuniya (1989)

[6] "Conformal Invariance and Applications in Statistical Mechanics", C. Itzykson, H. Saleur and J.B. Zuber ed. World Scientific (1988)

などである．[4], [5] は，それぞれ 1986 年，1988 年に京都で開かれた研究集会の報告集であり，その後の研究の方向を示した重要論文が満載で本書でも多いに参考にした．[6] は基本論文を集めた論文集であるが残念ながら絶版になっている．

ソリトン理論について，本文中にも何度かふれたが，

[7] 「ソリトンの数理」三輪哲二・神保道夫・伊達悦郎著，岩波講座 応用数学 [対象 4]，岩波書店 (1993)

[8] 「直接法によるソリトンの数理」広田良吾著，岩波書店 (1992)

などは本書と平行して読まれれば参考になると思う．

[9] 「可積分系の世界——戸田格子とその仲間」 高崎金久著，共立出版 (2001)

は豊富な内容を手際良く紹介しており，文献表も充実している．

無限次元 Lie 代数の表現論を本格的に学ぶには

[10] "Infinite-Dimensional Lie Algebras", 3rd ed., V.G. Kac, Cambridge Univ. Press (1990)
[11] 「無限次元 Lie 環」脇本 実著，岩波講座 現代数学の展開，岩波書店 (1999)

[10] は頼りになる座右の書．[11] は著者の無限次元リー環への想いが率直に伝わり，楽しく読めて役にたつ．

affine Lie 代数の対称性をもつ共形場理論について，より詳しい解説は

[12] 「モジュライ理論 3」上野健爾・清水勇二著，岩波講座 現代数学の展開，岩波書店 (1999)

およびその文献を参照いただきたい．

[13] 「場の理論とトポロジー」河野俊丈著，岩波講座 現代数学の展開，岩波書店 (1998)

には，3 次元位相的場の理論との関係が要領よく解説されている．

可解格子模型との関係について，さらに進んで勉強するには

[14] 「量子群とヤン・バクスター方程式」神保道夫著，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1990)
[15] 「ホロノミック量子場」神保道夫著，岩波講座 現代数学の展開，岩波書店 (1998)
[16] 「共形場理論と 1 次元量子系」川上則雄・梁 成吉著，新物理学選書，岩波書店 (1997)
[17] "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics", R.J. Baxter, Academic Press (1982)
[18] "Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models", Michio Jimbo and Tetsuji Miwa, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 85 (1995) AMS
[19] 「量子可積分系入門」白石潤一著，数理科学 SGC ライブラリ 28，サイエンス社 (2004)

などが参考になるであろう．[14] は可解格子模型の代数的基礎となる量子群，Yan-Baxter 方程式に関する格好の入門書．[15] は Ising 模型とモノドロミー保存変形の関係を詳しく解説してある．[16] は共形場理論の統計系への応用につ

いて，第一線の研究者による優れた解説書である．[17] は B.C. (Before CFT) の到達点を示す記念碑．[18] では共形場理論の方法を非臨界点の統計系に適用する道が開かれている．非臨界点理論で有効な，変形 Virasoro 代数 (および W 代数) について本書ではふれることができなかった．これについては [19] を参照願いたい．

弦理論への応用に関しては

[20] "String Theory, volume I, II", Joseph Polchinski, Cambridge Univ. Press (1998) ［邦訳：J. ポルチンスキー著／伊藤克司・小竹 悟・松尾 泰 共訳,「ストリング理論」1 巻, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2005)］

が標準的な教科書である．

なお，1991 年頃以降の関係論文の多くは，arXiv

[21] http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/

の hep-th 等から入手可能である．引用・被引用文献の参照や検索機能も充実しており便利である．

索　引

欧　文

は 行

ま 行

や 行

ら 行

わ

著者略歴

山田泰彦(やまだ やすひこ)

1961年　名古屋に生まれる
1988年　名古屋大学大学院理学研究科
　　　　博士課程修了(理学博士)
現　在　神戸大学理学部教授
　　　　専攻　数理物理・可積分系

2006年1月18日　初版発行

数理物理シリーズ 1
共形場理論入門

著　者　山田泰彦
発行者　山本　格

発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102-8260
電話(03)3262-5256(代表)・振替00140-7-44725

中央印刷・牧製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-00661-0 C3341